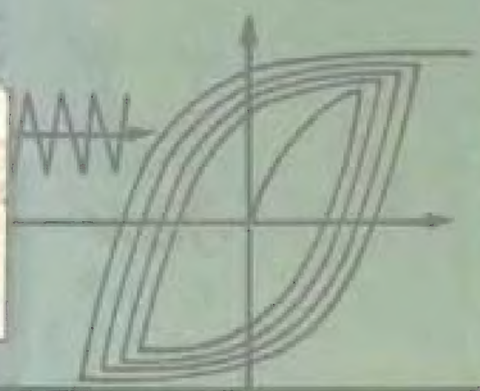
非线性连续介质力学基础

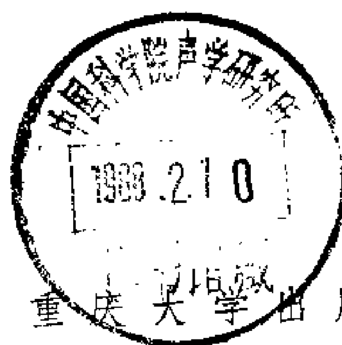
范镜泓　高芝晖　著



重庆大学出版社

非线性连续介质力学基础

范镜泓　高芝晖　著



重庆大学出版社

内 容 简 介

本书用较统一、较普遍和较新的观点介绍连续介质的基本力学原理及其应用，重点摆在有限变形、本构关系、热力学和公理化方法等难度较大的内容上。前五章在少而精的原则下，叙述连续介质力学的基本内容；后五章则在物理概念及其应用的基础上，介绍次弹性、超弹性、粘弹性、不可逆热力学、本构理论、非线性场论中的有限元、经典塑性理论与内蕴时间本构理论等较高深的内容。本书可作为力学、数学、机械、动力、土建、采矿和材料等理工科专业的研究生教材，亦可供大学教师、工程研究人员和高年级大学生参考。

非线性连续介质力学基础
范镜泓　高芝晖　著
责任编辑　朱庆祥

重庆大学出版社出版
新华书店重庆发行所发行
重庆大学出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16　印张：18.75　插页：4　字数：468千
1987年5月第一版　　1987年5月第一次印刷
印数：1—1,000
标准书号：ISBN 7-5624-0000-8 / O·1　统一书号：13408·4
定　价：3.50元　检 2

前　言

连续介质力学领域内的工作者现在有幸注视该学科近些年来在新的层次和广度范围内深入发展的趋势，正是这种活跃的势头孕育着连续介质力学某些难题深一层突破的新希望，也孕育着与它的发展密不可分的应用力学与工程学科深一层发展的可能性。回顾自1638年伽利略发表其名著“两种新的科学”以来的有关连续体力学的发展史，可以看出早期的力学家十分注意在较大范围内，运用力学的基本原理去发展有关的理论、概念及其数学描述。后来由于生产技术的发展，分工越来越细，人们被迫局限于很小的范围内工作。与这种状况相适应，力学教学与研究也往往局限于很小而互相割裂的分支内，模糊了它们的联系及其共同基础的研究。现在人们已越来越认识到这种方法的危害性，事实上，那种脱离了整体认识的专门化的研究是难以富有生命力的，而那种在庞杂、互相割裂和重复的力学科目下培养出来的学生是难以把握力学学科的总貌并富有创造性的。以上的叙勾述画了写作本书的背景和原动力，也决定了本书的内容和追求的目标。具体地说，本书力图用较统一、较普遍和较新的观点来讲述连续介质的基本力学原理，目的是使力学工作者和研究生从具体的力学分支中得到的理论知识综合化、深化和普遍化，以穿透狭窄力学分支的壁垒而了解连续介质力学总学科的概貌；本书也力图为力学工作者和研究生们更富有创造力的工作提供一定的理论基础，并为他们掌握当代连续介质力学领域内的新的学术思想和方法论提供必要的学习材料。在这种目的下，本书将把主要内容集中在有限变形、本构关系、不可逆热力学和公理化方法等概念难度较大的部分，以及有关连续介质力学诸分支相互联系的阐述上，至于解边值与初值问题的解析方法与数值方法则很少涉及。

本书前五章属于基本部分，注意在少而精的原则下介绍有限应变、瞬时运动、守恒定律及应力理论、热力学的基本概念和简单工程介质的本构关系及基本方程，也涉及到某些宏观规律的微观解释。第六章介绍次弹性材料和经典弹性理论，第七章介绍有限变形下的应力理论、运动

方程和功率方程，并介绍非线性场论的有限元要义和超弹性材料。第八章则用ε_{Tq}空间及其子空间的观点介绍连续介质的不可逆热力学。第九章则结合流变介质的分析，集各种研究本构方程的方法于一章，以便使读者在综合性地学习与运用中对本构方程及有关的方法论得到更深的理解与掌握，其中还较详细地讨论了本构方程的客观性原理。第十章则专门讲述经典塑性理论及内蕴时间本构理论，并对后者的应用作了较多的阐述。本书为适应广大读者的阅读起见，只使用了笛卡尔张量，但为了满足某些读者的需要，在"附录"中专门给出了张量分析等数学内容。

本书包含了笔者在材料本构关系和内时塑性理论等方面的一些研究工作；对客观性原理、Coleman 定理和不可逆热力学等作了一些分析与探讨，即使在一些传统内容的叙述上，如连续介质的基本模型、经典塑性理论、弹性理论和有限变形等也力求有所前进和创新。

本书初稿写成后曾在上海交通大学工程力学系给该系及外校的研究生进行了讲授，然后进行了修改。修改后的稿子又在重庆大学向内蕴时间本构理论研讨班成员及研究生再次进行讲授。初步实践表明，前五章约需20学时，可适用于固体力学和流体力学等专业研究生的需要；后五章约需40学时，偏重于固体力学方面的内容，教师可根据教学要求和学时数选择其中部分内容进行讲授。

本书从写作至出版前后只有两年，重庆大学出版社为提高本书的质量作了很大努力，特此深表谢忱。由于作者水平有限，缺点在所难免，敬希读者批评予以指正。

作者谨识于

歌乐山下

一九八六年四月

目　录

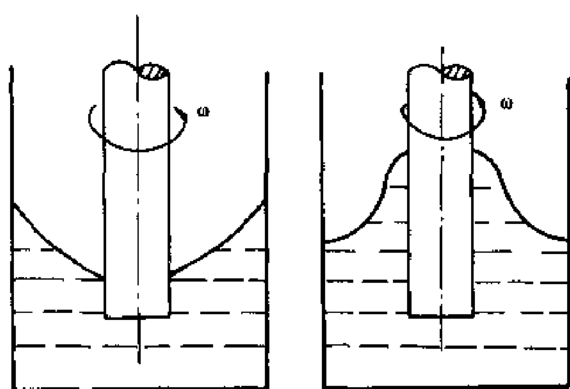
第一章 导 论

§1·1 近代连续介质力学发展的特点和展望

大约从1960年以来，连续介质力学在更深的层次和更广的范围内向前发展着。这一进程不仅在认识论和方法论上给力学工作者以新的启迪，而且给力学带来了新的活力，鼓舞着力学工作者从更高的和更普遍的观点把握本学科的发展规律，开辟那些过去很难涉猎的边缘领域和禁区。纵观连续介质力学这段时期的发展，不难看出它具有下述四个密切联系的特点。

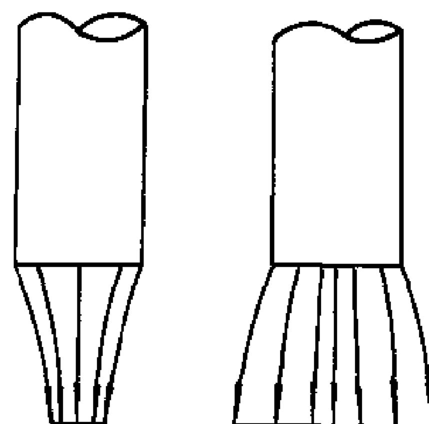
首先，它摆脱了连续介质力学与热力学相互割裂的局面，在互相渗透、互相补充的综合过程中向前发展。众所周知在连续介质力学发展的早期阶段，它处理的只是几种在特殊情况下工作的简单介质，例如在材料力学和水力学中处理的大都是在等温或绝热条件下工作的线弹性体和理想流体。对这类介质常可不卷入能量平衡，而列出只包含力学量的一组微分方程式去决定应力应变场或流动与压力分布。然而在近代由于大量新材料及新工艺的出现，也由于高温和变温等复杂工作条件，使得热力学量与力学量互相耦合，例如在焊接、铸造与热处理等工艺过程中，应力、温度与材料金相组织之间有着复杂的耦合作用，不仅温度要引起应力场的变化，而且相变释放的潜热也要改变应力场与温度场，因而连续介质力学就不可能脱离热力学来发展了。在弹性和气体动力学中固然离不开热力学的基本定律，在研究本构关系中热力学引入的约束条件、概念和基本关系的意义就更为突出了。从连续介质热力学的关系和原理来看待纯力学的关系和原理，则后者只不过是前者在特殊情况下（例如等温和绝热）的表现形式。这就使人们可以从高的层次和更大的系统范围内来考察各种力学问题，发展新概念、建立新模型。另一方面，传统热力学处理的是平衡态或拟平衡态的均匀系统，例如通过象体积、压力和温度等状态变量去描述理想气体的循环过程。然而若使研究的模型与实际比较接近时，就必须摆脱平衡态的束缚去发展非平衡态的热力学，摆脱均匀、闭系统和诸如循环等在发展热机时代引入的概念，而考虑非均匀的系统。这就要求用应力张量来代替压力，用应变张量来代替体积，即必须采用连续介质力学的概念和方法来研究热力学。这样就形成了理论物理学两个最古老的分支间互相渗透和补充的局面，使连续介质力学的发展建立在更坚实的物理基础之上，并大大开拓了自己的研究领域，这就是这一时期连续介质力学发展的第一个显著特点。

第二个特点是在这一时期内连续介质本构关系的研究日趋活跃。这主要是由于大量实际问题迫切需要建立更接近于材料真实响应特性的模型。实际上很多问题已不能用经典的模型，如线弹性，理想流体和牛顿流体来加以解释。例如柱杆的扭转时的伸长现象，岩石的剪胀特性，高分子粘弹流体在容器内旋转时的爬杆效应（Weissenberg效应，图1·1 *b*），及粘弹流体流出管口时向四周膨胀的效应（Barus效应，图1·2*b*）。另外在各种不同的工程问题中要求处理具有遗传性质的材料，即应力响应不仅与当时的应变有关，而且还与变形的历史过程有关，这些都对本构关系的研究提出了迫切的要求。促使力学工作者越来越重视本构关系的另一个原因，是人们已意识到本构关系研究的落后现状必将影响其它学科的深入发展。薛昌明



(a)粘性流体　　(b)粘弹流体

图1·1　Weissenberg效应



(a)粘性流体　　(b)粘弹流体

图1·2　Barus效应

（Sih，G·C·）关于本构关系在研究断裂与疲劳中的意义的下述讲话可从一个侧面来说明这一问题，他说[1]：“除非某些基本的问题被加以解决，断裂力学的研究将面临停滞。例如应当发展一种方法将材料特性的表观变化与由于损伤（例如空隙与裂隙的出现）而引起的材料性质的内蕴变化区别开来，这需要发展一种现实的本构关系通过宏观变量来计及微结构与微缺陷的影响。疲劳裂纹扩展是应能从这一观点得到好处的另一课题，损伤积累的概念必须通过疲劳过程的路径依赖性质弄清楚。”可以说明这一问题的另一观点是，在应力分析工作者中普遍感到本构理论的研究远远落后于计算力学的发展。现在的数值算法已可以处理象松驰、蠕变、循环加载和大变形等非常复杂的变形和流动情况，但所用的本构模型却常常与实际相差甚远（例如塑性变形后的卸载和循环加载），这就会使那些昂贵的和费时的非线性数值计算失去应有的实用价值。值得注意的是，当前人们研究本构关系的热潮是在各种条件已具备的情况下涌现的。除了上面提到的高级计算机和计算力学的发展以外，近二十年来发展起来的高级材料试验机（如MTS系统，Instron系统），使得人们可以更精确地研究材料的力学性能，检验和发展各种模型。另一方面是理论上的准备，这主要指的是理性力学的复兴及含内变量的不可逆热力学的发展。现在我们先对后者作进一步的说明，热力学在本构理论中的成功应用首先应归功于Biot，他在五十年代将含内变量的不可逆热力学成功地应用于粘弹性体的研究，这一进展鼓舞着人们向作为连续介质力学一大难题的塑性理论进军，并已取得了可喜的进展。在含内变量的不可逆热力学中，内变量被考虑成能够宏观地表征材料内部组织状态变化的某种内部参量，而载荷史的效应可等价地用对应的热力学路径造成的后果——内变量在该时刻的一组完整的集合值来加以代替，不可逆的能量耗散则表现在克服阻碍内变量变化的广义内摩擦力上。这一套理论上比较严格应用起来又较简便的方法，为考虑材料内部组织结构变化对宏观本构关系的影响，为将宏观表象与微观机制结合起来的努力开拓了新的途径。

第三是理性力学的复兴和发展。理性力学这一名词最初是Newton采用的，在十九世纪以前已有了相当的发展，如两种坐标下的应力应变描述、守恒方程和广义虎克定律等，但由于当时数学上遇到的困难，在十九世纪末页后的一段历史时期内基本上处于停滞状态。但是在近代由于新材料的应用越来越多，本构理论的发展越来越迫切，新现象和新问题不断涌现，迫切需要摆脱狭隘经验的束缚，从理性上加以概括和提高；另一方面近代数学各分支的发展也为在新的层次上恢复和发扬力学与数学紧密结合的古老传统开辟了可能，这促使了理性

力学在1950年前后开始的复兴，并在新的理论基础和数学工具下向前发展，这一进程中的先驱者有Truesdell，Noll和Coleman等人。理性力学从作为公理的最必须的基本事实出发，建立起与基本的力学和物理规律不相矛盾的公理系统，并由此运用严密的数学演绎去进行理性的分析，使理论具有较大的普遍性。理性力学提供了人们研究连续介质复杂力学行为的锐利武器，极大地推动着非线性场论的发展，诚如Odqvist所说〔2〕，理性力学学派"所完成的公理化方法，证明对于洞察非线性固体力学的复杂课题是极端重要的，因此应用力学的发展得感谢这一批年轻光辉的数学家不辞辛苦地打下我们课题的基础"。理性力学学派的这一努力有人比喻为古埃及量度尼罗河沙洲的大量实践到欧几里德几何公理体系的发展，其蕴含的意义是会在历史进程中进一步显示出来的。

第四是重视有限变形的研究。弹性力学作为精确理论本质上是非线性的，并进行过大量的分析，例如 Finger1894年就完成了超弹性(Hyperelasticity）有限变形理论的研究，但由于有限弹性理论的方程冗长、繁杂而难以求解，于是大家走上了线性化的道路。线弹性理论有了一百多年历史，虽在工程中获得了重要的应用，但早已处于强弩之末。近代由于生产技术的发展提出了大量有限变形的问题（例如金属成形、薄壁结构、裂尖场、地质构造、高分子材料和生物组织的分析等）更促使几何非线性的研究日趋活跃。另一方面除计算机的发展使数字计算变得容易以外，精密的数学分析工具也日趋成熟，张量分析的大量应用使过去需要大量篇幅的数学公式变得十分简单清晰，而Cayley-Hamilton定理又使张量多项式的最高阶数降低至三阶以下，特别是Rivlin等人找到了一些简单而重要的非线性问题的精确解，也重新鼓起了人们对有限变形理论研究的勇气。在塑性大变形理论的研究方面，自从Nagtegaal 和 de Jong在1981年斯坦福大学举行的塑性大变形讨论会上，报告他们计算简单剪切大变形时得到了与实际不符的摆动剪应力的奇怪结果之后，Truesdell等对塑性理论的批评才更引起了大家的重视（参见193页和109页）。人们纷纷从本构关系客观性原理的要求出发，从材料的细观力学到宏观响应特性等多方面进行了研究，弄清楚了区分材料本身的旋转与连续介质力学观念上的旋转在建立大变形本构关系上的重要性，这就促进了有限变形的研究在更高层次上的深入发展。

从以上的综述中我们可以看出非线性连续介质力学的研究已经取得了重大的进展。展望其发展趋势，可以预料在方法论上它将更多地从分析走向综合，从限于个别分支的努力，扩大到包括物理、化学、数学和材料学科等多学科的相互渗透和进行大系统的研究，并注意将宏观的表象与物质内部组织结构的变化联系起来。近代连续介质力学有坚实的理论基础和新颖的方法论，有严密的数学分析工具和高速的数字计算机，以及有现代化的实验设备作为后盾，不难想象这将意味着连续介质力学从总体到各分支深一层发展的新的希望，也孕育着那些与工程科学紧密相连的应用力学学科，如疲劳、弹塑性断裂力学、弹塑性结构力学、复合材料力学、金属成型、非牛顿流体力学、弹塑性冲击与稳定和地下工程力学等在实际应用中取得纵深进展的可能性，而这一切必将产生巨大的社会经济效益。作为力学工作者我们应当认真注意这一动向，提高和开阔视野以便掌握近代力学的发展规律，增强信心和勇气，大胆地和不断深入进行连续介质力学及其应用的研究，我们也应当大胆开拓新领域，勇于进行横向学科间的穿插，在这一过程中发展新的概念和方法，为祖国的力学事业作出应有的贡献。

§1·2 宏观无穷小、微观无限大的连续介质力学模型

连续介质力学的深入发展，要求建立作为其分析基础的概念更清晰的模型。连续介质力学属于唯象理论，它不采用物质的宏观行为由粒子理论推出的本质论的观点，而采用连续介质的假设，使得与连续场论有关的数学分析都可无困难地进行。由于这种方法远较本质论简单实用，且由于它所依据的是宏观实验，而所得的结论仍用于宏观世界，因此又是合理的，这使得它的应用极为广泛。但是由于连续介质的概念是一种数学上的抽象，因而当将它用到真实的物理世界时必须十分谨慎，应当注意将连续介质的观点与粒子论的观点很好地协调起来。解决这一“实际粒子离散”和“模型介质连续”概念上困难的办法是宏观无限小和微观无限大的模型〔26〕。这一模型认为在连续介质中所使用的微元体(或微系统)不是一个点，它应包含大量的粒子，以便从物理的观点来看，它使温度、熵、质量和能量密度等具有确定的物理内涵；另一方面它又足够小，以致从场的分析的观点来看，它在无穷小的尺寸范围内均匀性的假设对场论中数学分析引起的误差可以忽略不计。这种宏观无限小和微观无限大的模型表面上看有些奇怪，实际上是一种很有用的研究连续介质的热力学模型。当然这种唯象学的模型也有一定的实用条件，如果考察的范围小到与材料的特征尺寸密切相关的某种尺度以下，该模型的误差就可能是很大的。例如地表上的空气在室温下的特征尺寸（平均自由路径）大约是5×10^{-6}厘米*，因此如果考虑空气围绕飞机的流动，我们可以考虑空气是连续介质，而对水分子来说，其特征尺寸大约是1 Å（10^{-8}厘米），如果我们考虑的问题中的尺寸小于10^{-6}厘米；则由此模型引入的误差就会是很大的。

顺便指出，习惯上常把物体分为固体和流体，把材料分成弹性体和粘弹性体等，实际上这些概念都是相对的，有条件的，它们同物质的结构、载荷特性和环境有关。在一定温度下缓缓拉伸沥青，它的变形近似于流体的流动，如果在高速拉伸下，其试样则呈现固体断裂时那种脆性断口；如果在人类通常的活动时间内考察地壳的变化是难以观察出地球的变形的，但如果从地质构造的长远周期来考察地壳的变化，则会发现地壳也在蠕变。后面这一情况促使我们象特征尺寸一样引人特征时间的概念，以便与外界的作用时间或观察时间作相对的比较，在第九章中将要引人的松驰时间就可以作为特征时间的例子。如果两个地质（或煤层）构造，一个特征（松驰）时间长而另一个短，则在同样的地质力作用下，一个可能不会造成损害而另一个可能在较短时间内造成较大的蠕变而塌方。

*这里引人的数据引自参考文献〔4〕

第二章　有限形变与应变

本章研究连续介质域的变形。假设一点处的变形只与该质点无限小邻域内各质点间的相对运动有关，而与有限距离质点的运动无关。研究的内容包括参考标架的选择、构形的描述和如何从质点邻域的运动中分离出纯变形部分以及质点邻域变形的合适度量方法，这种研究是纯几何学的。在研究变形时，暂不考虑引起变形的力和连续介质的物性，对变形的大小则不加限制。

§2·1　构形、变形和流动、Lagrange描述和Euler 描述

考虑连续介质构成的集合。所谓"质点"（Particle），是指构成连续介质的某一无限小物质部分。而所谓"点"（Point）则指占据空间某一确定位置的几何点。我们假设集合Ω_x的每一质点占有确定的空间点位置，而Ω_x中的每一空间点也恰为一质点所占据。质点与空间点的这种对应关系是双向单值的，即集合Ω_x对应的空间域内充满着连续介质。

称所研究的连续介质集合Ω_x在空间所占据的域为构形（Configuration）。任意瞬时的构形记为χ，连续介质构形随时间的变化称之为运动或流动。流动一词常用以着重指明连续介质运动的整个过程，而在塑性力学中流动则带有引起永久变形的运动的含义。

术语"变形"指已变形的构形相对于初始（未变形）的自然构形的改变。运动不一定产生变形，只有当连续介质域中各质点间有相对运动时才产生变形。研究构形的变形就是确定由初始构形到变形构形间的相对运动，以得到变形场的恰当描述。研究变形时，我们强调的是初始构形与瞬时构形间的相对关系，而不去注意中间构形或经过怎样的路径才从初始构形达到瞬时构形。

为了研究连续介质的流动和变形，必须选择一固定的笛卡尔坐标系，并选择某一特定瞬时的构形作为参考构形χ_0去考察构形的变化。参考构形的选取是任意的，不失一般性，可取$t=0$时刻或未变形状态的构形作为参考构形。参考构形中的质点P在固定笛卡尔坐标系中以大写字母$\mathbf{X}(X_1,X_2,X_3)$表之。不论物体怎样运动，该质点在参考构形中的坐标是确定不变的。这样，这类坐标就可作为识别各"质点"的标记，因此称$\mathbf{X}$为物质坐标。今后简称物质坐标为$\mathbf{X}$的质点为"质点$\mathbf{X}$"。

在t瞬时，质点$\mathbf{X}$运动至空间点$\mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$位置（以小写字母表之）。显然$\mathbf{x}$是质点物质坐标和时间为函数，记为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)。\tag{1·1}$$

坐标$\mathbf{x}$可作为识别"空间点"的标记，在不同的时刻它们由不同的质点$\mathbf{X}$所占有，故称$\mathbf{x}$为空间坐标。

连续介质集合Ω_x的参考构形和瞬时构形可用不同的坐标架来确定（图2·1a）。本书中为简化起见采用同一个笛卡尔坐标架作为物质和空间坐标架（图2·1b）。

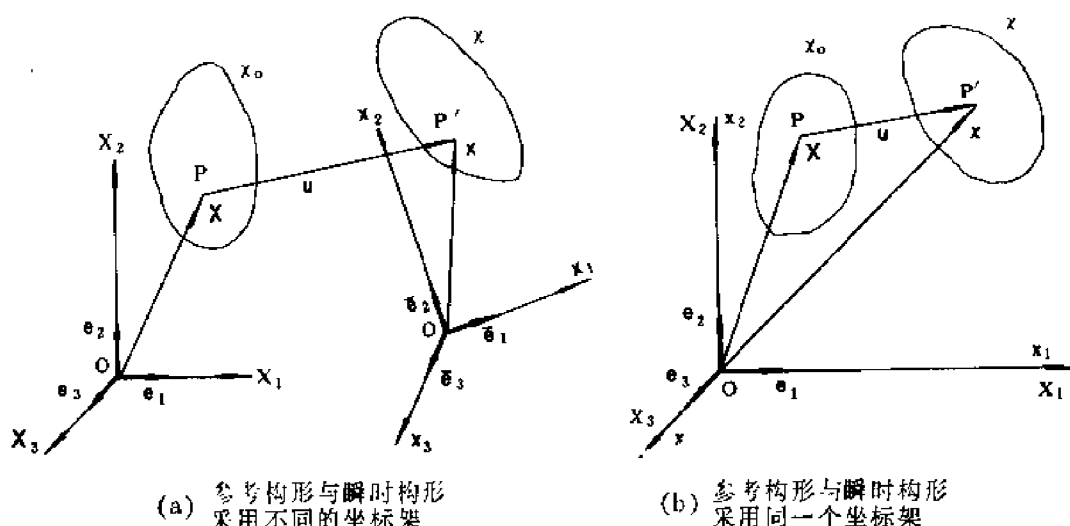


图2.1 物质与空间坐标架

在连续介质力学中，物理和力学参量可用物质坐标**X**为自变量来描述，称为物质描述或Lagrange描述；也可以用空间坐标**x**为自变量来描述，称为空间描述或Euler描述。物质描述给出了任一质点在任意瞬时的物理参量的值（如密度、速度等），这样所有质点的信息就给出了连续介质场的充分描述。空间描述给出的则是任一空间点在任意瞬时的参量值。显然，不同瞬时该空间点将为不同的质点所占据。可以形象地将空间描述比喻为交通警察对街道上汽车运动情况的描述，而物质描述则比喻为该街道上所有汽车司机对汽车的位置和运动速度等的描述。在研究运动学时采用Lagrange描述较简单，而研究静力学或动力学时却带来复杂化，此时，空间描述却能得到简单的表达式。不过这两种描述是可以互换的，若设某物理量的空间描述为

$$f(\mathbf{x}, t), \tag{1·2}$$

将(1·1)代入其中，就将空间描述变换成了物质描述

$$p = f[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t] = g(\mathbf{X}, t)。 \tag{1·3}$$

设式(1·1)的函数为单值、连续、存在一阶连续偏导数，且其雅可比行列式在给定域中满足

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_I}\right| > 0, \tag{1·4}$$

则存在唯一的反函数

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)。 \tag{1·5}$$

于是某参变量 p 的物质描述 $p = g(\mathbf{X}, t)$ 可通过式(1·5)逆变换为原来的空间描述式(1·2)，即

$$p = g[\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t] = f(\mathbf{x}, t)。 \tag{1·6}$$

在进入讨论变形之前，我们先对矢量和张量的符号及其运算的表示作下述规定。

标量、矢量和张量的符号表示：（1）矢量及由其元素构成的列矩阵用粗体大写或粗体小写字母表示，而其行矩阵则用转置来表示。二阶张量及其元素构成的矩阵用粗体大写或粗体小写字母表示。例如下面即将讨论的Almansi应变张量及其元素构成的矩阵用粗体小写字母**e**表示。二阶张量有时也用字母下加波纹号来表示，例如应力张量可记为 $\underset{\sim}{\tau}$。（2）凡标量用白体字母表示。矢量和张量的分量，用带下标的白体字母表示。若为物质坐标系（参考构

形）中的分量，其下标采用大写字母，若为空间坐标系（瞬时构形）中的分量，其下标采用小写字母。有些张量如变形梯度的分量 $F_{iJ}=\frac{\partial x_i}{\partial X_J}$，联系着初始构形与瞬时构形，则其下标为混合的，既有小写字母下标 i，又有大写字母下标 J。（3）矢量和张量分量偏导数的表示法：若对物质坐标求偏导数，则采用逗号后加大写字母的下标表示，例如 $x_{i,J}$ 表示 $\frac{\partial x_i}{\partial X_J}$。若对空间坐标求偏导数，则采用逗号后加小写字母的下标表示，例如 $v_{i,j}$ 表示 $\partial v_i/\partial x_j$。

矢量和张量的运算表示法：（1）矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的标积用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_ib_i$ 表示，它们的矢积用 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=e_{ijk}a_jb_k\mathbf{e}_i$ 表示，式中 $\mathbf{e}_i$ 为笛卡尔坐标轴方向的单位矢量，e_{ijk} 为Ricci符号。（2）两个二阶张量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的内积仍为二阶张量 $\mathbf{C}$，或用分量记法记为 $C_{ij}=A_{ik}B_{kj}$，或用矩阵符号法记为 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$（注意：这并非并矢记法）。若对调内积次序，即求 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 的内积，则变为另一二阶张量 $\mathbf{D}$，记为 $D_{ij}=B_{ik}A_{kj}$ 或 $\mathbf{D}=\mathbf{BA}$。一个二阶张量 $\mathbf{A}$ 与一矢量 $\mathbf{b}$ 的内积仍为一矢量 $\mathbf{c}$，或用分量记法记为 $C_i=A_{ij}b_j$，或用矩阵符号记法记为 $\mathbf{C}=\mathbf{Ab}$，矢量在矩阵乘法中一律视为列矩阵，若对调两者的内积次序，得另一矢量 $\mathbf{d}$，记为 $d_i=b_iA_{ji}$，或 $\mathbf{d}^T=\mathbf{b}^T\mathbf{A}$，这里 $\mathbf{b}^T$ 为 $\mathbf{b}$ 的转置（即为行矩阵）。

§2·2 变形梯度和极分解

连续介质的运动可由(1.1)式表示，当连续介质各质点间存在相对运动时，介质就产生了变形。

考虑两个无限接近的质点 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$，经过变形后其矢径差已从 $d\mathbf{X}$ 变为 $d\mathbf{x}$，则在瞬时构形 $\mathcal{X}$ 中，它们分别占有空间位置 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$，且由(1·1)式有 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$，

其分量为：

$$x_i=x_i(X_J,t), \tag{2·1a}$$

及

$$\mathbf{x}+d\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t), \tag{2·1b}$$

质点 $\mathbf{X}$ 相对于参考构形的位移则为（图2·1b）

$$\mathbf{u}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)-\mathbf{X}, \tag{2·2a}$$

或

$$u_i=x_i-X_I。(I=i) \tag{2·2b}$$

将 $d\mathbf{x}$ 用 $d\mathbf{X}$ 表示，并写成分量形式为

$$dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial X_J}dX_J \tag{2·3}$$

上式可由式(2.1b)展成台劳级数并甩去高次项而得到。量 $\partial x_i/\partial X_J$ 称为变形梯度的分量，变形梯度为二阶张量，以符号 $\mathbf{F}\equiv\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}$ 表示

$$\mathbf{F}\equiv\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial x_1}{\partial X_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial x_1}{\partial X_{\mathrm{III}}}\\ \frac{\partial x_2}{\partial X_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial x_2}{\partial X_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial x_2}{\partial X_{\mathrm{III}}}\\ \frac{\partial x_3}{\partial X_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial x_3}{\partial X_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial x_3}{\partial X_{\mathrm{III}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{1\mathrm{I}} & F_{1\mathrm{II}} & F_{1\mathrm{III}}\\ F_{2\mathrm{I}} & F_{2\mathrm{II}} & F_{2\mathrm{III}}\\ F_{3\mathrm{I}} & F_{3\mathrm{II}} & F_{3\mathrm{III}}\end{pmatrix} \tag{2·4a}$$

其分量由式(2·2 b)可得

$$F_{iJ}=\frac{\partial x_i}{\partial X_J}=x_{i,J}=\delta_{iJ}+u_{i,J} \tag{2·4b}$$

式中

$$u_{i,J}=\frac{\partial u_i}{\partial X_J} \tag{2·4c}$$

按照前节中的规则，将矢量写成列阵，则由式(2.3)可得

$$d\mathbf{x}=\mathbf{F}d\mathbf{X} \tag{2·5}$$

变形梯度反映了质点X邻域的相对运动。式(2.5)、(2.3)表明，$d\mathbf{x}$与$d\mathbf{X}$间成线性关系。

变形梯度的行列式

$$J=\det\mathbf{F}\neq 0 \tag{2·6}$$

称为雅可比行列式，它给出了质点X邻域无限小单元的瞬时构形与参考构形的体积比（参看(5·2)式）。

变形梯度F为非奇异张量，因此具有逆张量$\mathbf{F}^{-1}$，其分量F^{-1}_{Ji}为:

$$F^{-1}_{Ji}=\frac{\partial X_J}{\partial x_i}=\delta_{Ji}-u_{J,i} \tag{2·7}$$

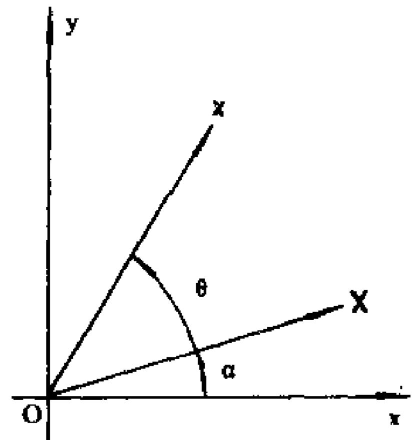


图2·2　绕Z轴转动

但变形梯度不能作为变形程度的合适度量。事实上能作为变形程度度量的量的必要条件是刚体运动时它应保持不变，而F不满足此条件。例如，物体绕Z轴作刚体转动时由(图2·2)有:

$$\begin{cases} x=r\cos(\theta+\alpha)=X\cos\theta-Y\sin\theta \\ y=r\sin(\theta+\alpha)=X\sin\theta+Y\cos\theta \\ z=Z \end{cases}$$

则由(2·4a)得

$$\mathbf{F}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\neq \text{const.}$$

这说明变形梯度包括了X点邻域的变形和转动。我们将变形梯度分解为变形和转动两个相继的过程。

根据张量极分解定理〔参见附录C〕，非奇异方阵F可唯一地分解为下面两个乘积之一

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U},\quad \mathbf{F}=\mathbf{V}\mathbf{R}。 \tag{2·8}$$

其中R为正交矩阵，即R满足

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R}=\mathbf{R}\mathbf{R}^T=\mathbf{I}\text{（单位矩阵）}, \tag{2·9}$$

而U和V为正定对称矩阵。R反映质点X的邻域绕过X的瞬时转动轴作刚体转动，而U和V则反映X邻域的变形。事实上，由

$$d\mathbf{x}=\mathbf{F}d\mathbf{X}=\mathbf{R}\mathbf{U}d\mathbf{X}=\mathbf{R}d\mathbf{y}, \tag{2·10a}$$

式中

$$d\mathbf{y}=\mathbf{U}d\mathbf{X}, \tag{2·10b}$$

可见，第一种分解$\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}$将相对运动分解为顺序的两步：第一步$d\mathbf{X}\to d\mathbf{y}$，第二步$d\mathbf{y}\to d\mathbf{x}$。

首先，因U为实对称阵，故存在三个正交的主方向$\mathbf{N}_I$使得$\mathbf{UN}_I = U_I\mathbf{N}_I$（对重复下标不求和），当坐标轴取此三个方向时，U成为对角阵

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} U_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & U_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & U_{\mathrm{III}} \end{pmatrix} \tag{2·10c}$$

因此，$dy_{\mathrm{I}} = U_{\mathrm{I}}dX_{\mathrm{I}}$　（不作和，$\mathrm{I}=1,2,3$）　(2·10d)

dy_{I}为沿主方向的伸长，其主伸长比为U_{I}，若定义工程应变为$E_{\mathrm{I}}=\dfrac{ds-ds_0}{ds_0}$，则$E_{\mathrm{I}}=U_{\mathrm{I}}-1$。即第一步反映的是纯变形。其次，由

$$|d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{y}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}d\mathbf{y} = d\mathbf{y}^T d\mathbf{y} = |d\mathbf{y}|^2 \tag{2·10e}$$

可以看出，作第二步运动时，该点邻域任意两点间之距离保持不变，即作刚体转动。

当作第二种分解时，则有

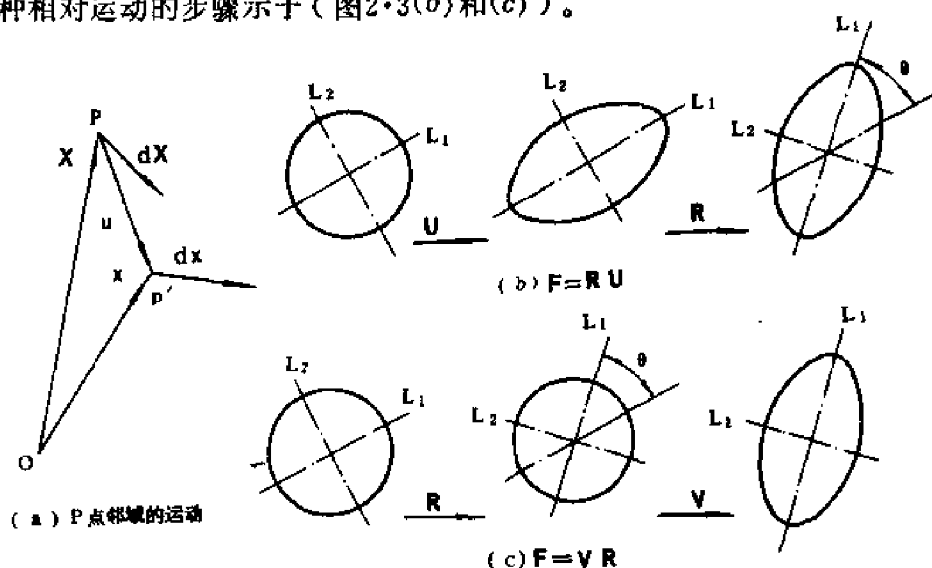
$$d\mathbf{x} = \mathbf{VR}d\mathbf{X} = \mathbf{V}d\mathbf{y} \tag{2·11a}$$

式中

$$d\mathbf{y} = \mathbf{R}d\mathbf{X} \tag{2·11b}$$

此时第一步先作纯转动$d\mathbf{X}\rightarrow d\mathbf{y}$，第二步作纯变形$d\mathbf{y}\rightarrow d\mathbf{x}$。

这两种相对运动的步骤示于（图2·3(b)和(c)）。



（a）P点邻域的运动

（b）F=RU

（c）F=VR

图2·3　P点邻域运动的分解

由此分解可见，一个可变形的无限小单元体在微小时间间隔内的变化可看成三种运动形式的合成：(1)跟随单元体中某质点X的平移；(2)绕过该质点的某瞬时转动轴的转动；(3)沿过该质点的三个主方向的伸长或缩短。

表示纯变形的张量U和V由于它们在极分解时各位于R的右边和左边，故分别称为“右”和“左”Cauchy-Green伸长张量。两种伸长张量之间及它们与变形梯度F间的关系可由式(2·8)求得如下

$$\mathbf{U}=\mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R},\quad \mathbf{V}=\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \tag{2·12}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{U}^2 &= \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{C} \\ \mathbf{V}^2 &= \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^T = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{B} \end{aligned}\right\} \tag{2·13a}$$

C与B的分量表达式可由式(2·4a)求得为

$$C_{IJ}=F_{kI}F_{kJ}=\frac{\partial x_k}{\partial X_I}\frac{\partial x_k}{\partial X_J} \tag{2·13b}$$

$$B_{ij}=F_{iK}F_{jK}=\frac{\partial x_i}{\partial X_K}\frac{\partial x_j}{\partial X_K} \tag{2·13c}$$

可见C、B为对称张量，并分别称为右和左Cauchy-Green张量。

例2.1　已知变形场为 $x_1=\frac{2}{5}X_1-X_2$，　$x_2=\frac{11}{5}X_1+2X_2$，$x_3=X_3$，试求右和左Cauchy-Green伸长张量U和V及其主值和主向。

解：根据式(2.4a)，变形梯度F为：

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -1 & 0\\ \frac{11}{5} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{a}$$

由此得

$$\mathbf{U}^2=\mathbf{F}^T\mathbf{F}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{b}$$

为了求得$\mathbf{U}^2$和U的主方向，先写出上式的特征方程如下

$$\begin{vmatrix}5-\lambda' & 4 & 0\\ 4 & 5-\lambda' & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda'\end{vmatrix}=0 \tag{c}$$

展开得　$(1-\lambda')[(5-\lambda')^2-16]=0$　(d)

解之得特征方程的特征根为

$$\lambda'_1=9\ ,\quad \lambda'_2=1\ ,\quad \lambda'_3=1\ 。 \tag{e}$$

设对应于特征值 λ'_K的正规化特征矢量（也即主值方向的单位矢量）为$\mathbf{N}'_K$，则由其定义可得

$$\mathbf{U}^2\mathbf{N}'-\lambda'\mathbf{N}'=0 \tag{f}$$

及　$\mathbf{N}'^T\mathbf{N}'=1$　(g)

将$\lambda'=9$及式(b)表达的$\mathbf{U}^2$代入式(f)，并应用正规化条件(g)可得$(\mathbf{N}'_1)^T=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$。但由于特征根 λ'_2和 λ'_3相同，故 $\mathbf{N}'_2$和 $\mathbf{N}'_3$是不定的（恰如平面应力状态中主应力相同的情况一样）。在此情况下我们可取任一对正交的$\mathbf{N}'_2$和 $\mathbf{N}'_3$，并使它们与 $\mathbf{N}'_1$垂直，例如取$(\mathbf{N}'_2)^T=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$和$(\mathbf{N}'_3)^T=(0,0,1)$

注意到U的主值$\lambda_K=\sqrt{\lambda'_K}$，则得U之主值为$\lambda_1=3$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，而U的正规化特征矢量

N与U^2的特征矢量N′相同，即N = N′。由此得

$$\mathbf{U}=(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{N}_1^T\\ \mathbf{N}_2^T\\ \mathbf{N}_3^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由此

$$\mathbf{U}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

和

$$\mathbf{R}=\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

而

$$\mathbf{V}=\mathbf{F}\mathbf{R}^T=\begin{pmatrix}\frac{26}{25} & -\frac{7}{25} & 0\\ -\frac{7}{25} & \frac{74}{25} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

不难证明V的主值和U的主值相同，也为$\lambda_1=3$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，而V的正规化特征矢量$\overline{\mathbf{N}}$可将N经过旋转R而得到，即$\overline{\mathbf{N}}=\mathbf{RN}$。由此$(\overline{\mathbf{N}_1})^T=\left(\frac{19}{25\sqrt{2}},\ \frac{67}{25\sqrt{2}},\ 0\right)$，由于$\lambda_2$和$\lambda_3$相同，主方向$\overline{\mathbf{N}_2}$和$\overline{\mathbf{N}_3}$亦不定，但应同$\overline{\mathbf{N}_1}$正交。

由上例可见，求伸长张量U与V在一般情况下须卷入U或V的平方，因而是比较困难的。为此引入Green与Almansi应变张量。

§2·3 有限应变张量及其不变量

考虑变形前体内任一质点P与P邻域内的另外两质点P_1和P_2，它们分别构成无限小物质线元PP_1和PP_2，并分别用矢量$d\mathbf{X}$和$\delta\mathbf{X}$表示(图2·4)。两矢量间夹角为θ_0，长分别为ds_0和δs_0，方向余弦分别为$N_I=dX_I/ds_0$和$M_I=\delta X_I/\delta s_0$。变形后在$t$瞬时，此两矢量变为$d\mathbf{x}$和$\delta\mathbf{x}$两者夹角变为$\theta$，长分别变为$ds$和$\delta s$，方向余弦分别为$n_i=dx_i/ds$和$m_i=\delta x_i/\delta s$。

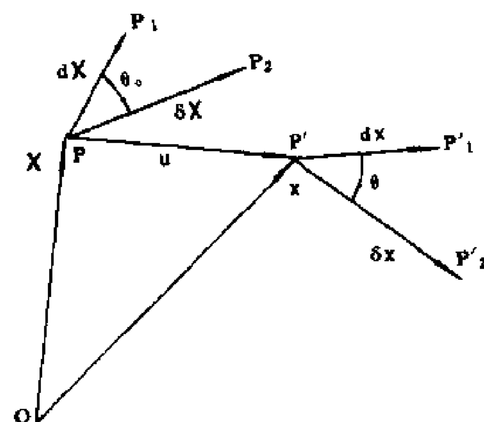


图2·4 P点邻域的运动

变形后与变形前此两矢量标积之差可反映该质点P邻域的变形程度

$$dx^T\delta x - dX^T\delta X = dX^T(F^TF - I)\delta X = 2dX^TE\delta X \tag{3·1}$$

其分量形式为

$$dx_k\delta x_k - dX_K\delta X_K = 2E_{IJ}dX_I\delta X_J \tag{3·2}$$

变形后与变形前两矢量标积之差还可写成

$$dx^T\delta x - dX^T\delta X = dx^TI\delta x - dx^T(F^{-1})^TF^{-1}\delta x = dx^T[I - (FF^T)^{-1}]\delta x$$
$$= 2dx^Te\delta x \tag{3·3a}$$

其分量形式为

$$dx_k\delta x_k - dX_K\delta X_K = 2e_{ij}\cdot dx_i\delta x_j \tag{3·3b}$$

(3·1)和(3·3a)式中E和e为无因次的量。

$$E = \frac{1}{2}(F^TF - I) = \frac{1}{2}(C - I) \tag{3·4}$$

$$e = \frac{1}{2}[I - (FF^T)^{-1}] = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \tag{3·5}$$

当P质点的无限小邻域作刚体运动时，三角形元素PP_1P_2在运动中不改变其形状和大小。此时(3·1)与(3·3a)左边之值为0，则应有E = 0和e = 0。即E和e满足作为变形程度度量的必要条件。E和e分别称为Green和Almansi应变张量，它们为二阶对称张量。由(3·1)和(3·3a)可见，E是基于初始构形描述的应变张量，而e则是基于瞬时构形描述的应变张量。由(3·4)式、(3·5)式(2·4b)式和(2·7)式，E和e的分量分别为

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(F_{kI}F_{kJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_I}\frac{\partial x_k}{\partial X_J} - \delta_{IJ}\right) \tag{3·6}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - F^{-1}_{Ki}F^{-1}_{Kj}) = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_K}{\partial x_i}\frac{\partial X_K}{\partial x_j}\right) \tag{3·7}$$

注意到式(2.2b)，则上式还可用位移分量表示如下：

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial u_k}{\partial X_I}\frac{\partial u_k}{\partial X_J}\right) \tag{3·8}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_K}{\partial x_i}\frac{\partial u_K}{\partial x_j}\right) \tag{3·9}$$

由于E为二阶对称张量，因此在参考构形中过P质点存在三个互相正交的变形主轴。以主轴为局部笛卡尔坐标系时E变为对角阵，其主对角线元素E_I即为Green应变张量主值，它由下列三次方程求得

$$E^3 - I_{(\mathrm{I})}E^2 + I_{(\mathrm{II})}E - I_{(\mathrm{III})} = 0 \tag{3·10}$$

式中$I_{(\mathrm{I})}$、$I_{(\mathrm{II})}$、$I_{(\mathrm{III})}$为应变张量E的三个主不变量

$$\left.\begin{aligned}
I_{(\mathrm{I})} &= E_{KK}\\
I_{(\mathrm{II})} &= \frac{1}{2}e_{IJK}e_{IMN}E_{KN}E_{JM} = \frac{1}{2}E_{II}E_{KK} - E_{JK}E_{JK}\\
I_{(\mathrm{III})} &= \frac{1}{6}e_{IJK}e_{LMN}E_{IL}E_{JM}E_{KN} = \det E
\end{aligned}\right\} \tag{3·11}$$

在求得E的主值后，Green应变张量E的主轴的方向余弦N_I由解下列方程组求得：

$$
\left.\begin{aligned}
&(E_{IJ}-E\delta_{IJ})N_J=0\\
&N_IN_I=1
\end{aligned}\right\}
\tag{3.12}
$$

变形后此三主轴仍保持互相垂直，且即为Almansi应变张量$\mathbf{e}$的主轴方向。

对Almansi应变张量$\mathbf{e}$，可作与上面完全相同的论述。

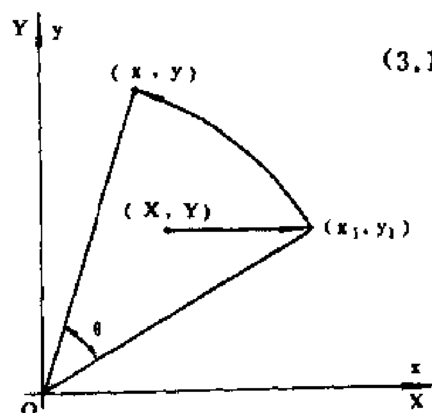


图2.5 两步运动

例2.2 设物体作平面运动，其过程由两步构成：①各质点沿x轴向有一运动，$x_1=aX$，$y_1=Y$；②接着绕Z轴作刚体转动，转过θ角(图2.5)。试求其Green和Almansi应变张量$\mathbf{E}$和$\mathbf{e}$。

解：作第一步运动时

$$
\mathbf{x}_1=\mathbf{F}_1\mathbf{X} \tag{a}
$$

式中

$$
\mathbf{x}_1=\begin{Bmatrix}x_1\\y_1\end{Bmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{Bmatrix}X\\Y\end{Bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}a&0\\0&1\end{bmatrix}
$$

作第二步运动时

$$
\left.\begin{aligned}
x&=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta\\
y&=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta
\end{aligned}\right\}
\tag{b}
$$

或

$$
\mathbf{x}=\mathbf{F}_2\mathbf{x}_1=\mathbf{Q}\mathbf{x}_1=\mathbf{Q}\mathbf{F}_1\mathbf{X}=\mathbf{F}\mathbf{X} \tag{c}
$$

式中$\mathbf{F}_2$为正交矩阵，即

$$
\mathbf{F}_2=\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\mathbf{Q}\mathbf{F}_1, \tag{d}
$$

由(c)得：

$$
\left.\begin{aligned}
x&=aX\cos\theta-Y\sin\theta\\
y&=aX\sin\theta+Y\cos\theta
\end{aligned}\right\}
\tag{e}
$$

或对$\mathbf{X}$解出得

$$
\left.\begin{aligned}
X&=\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{a}\sin\theta\\
Y&=-x\sin\theta+y\cos\theta
\end{aligned}\right\}
\tag{f}
$$

利用(3·6)和(3·7)式，即可求得

$$
\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(a^2-1)&0\\ 0&0\end{pmatrix} \tag{g}
$$

$$
\mathbf{e}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{a^2})\cos^2\theta&\frac{1}{2}(1-a^2)\sin\theta\cos\theta\\ \frac{1}{2}(1-\frac{1}{a^2})\sin\theta\cos\theta&\frac{1}{2}(1-a^2)\sin^2\theta\end{pmatrix} \tag{h}
$$

若只有第一步，而无第二步，即$\theta=0$，则可得Green和Almansi应变张量$\overline{\mathbf{E}}$和$\overline{\mathbf{e}}$为

$$\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \text{ 和 } \overline{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\frac{1}{a^2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见刚体转动不影响E值，但影响e值，事实上

$$\overline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1^T\mathbf{F}_1 - \mathbf{I}), \quad \overline{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}[\mathbf{I} - (\mathbf{F}_1\mathbf{F}_1^T)^{-1}] \tag{3·13a}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}[\mathbf{F}_1^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}_1 - \mathbf{I}] = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1^T\mathbf{F}_1 - \mathbf{I}) = \overline{\mathbf{E}} \tag{3·13b}$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}[\mathbf{I} - (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1}] = \frac{1}{2}[\mathbf{I} - (\mathbf{Q}\mathbf{F}_1\mathbf{F}_1^T\mathbf{Q}^T)^{-1}] = \frac{1}{2}\mathbf{Q}[\mathbf{I} - (\mathbf{F}_1\mathbf{F}_1^T)^{-1}]\mathbf{Q}^T$$

$$= \mathbf{Q}\,\overline{\mathbf{e}}\,\mathbf{Q}^T \tag{3·14}$$

从几何意义上说，计算E时，我们是以变形前构形为基准(物质描述)，刚体转动并不影响此基准。而计算e时，则是以变形后构形为基准（空间描述），刚体转动显然影响变形后的构形，因此刚体转动时E值不变，而e值要变。关于这一问题的进一步讨论将在§9·6的客观性原理中进行，在那里引入了客观性张量与非客观性张量的概念，特别是讨论了两点张量场在坐标系旋转时的特性，有兴趣的读者可先行参阅。

§2·4 伸长比、有限应变的几何解释

为解释Green和Almansi应变张量的几何意义，将(3·2)式除以$ds_0\delta s_0$，并注意到

$$\cos\theta_0 = (dX_I/ds_0)(\delta X_I/\delta s_0) = N_I M_I$$

$$\cos\theta = (dx_i/ds)(\delta x_i/\delta s) = n_i m_i$$

可得

$$\frac{ds}{ds_0}\cdot\frac{\delta s}{\delta s_0}\cos\theta - \cos\theta_0 = 2E_{IJ}N_I M_J \tag{4·1a}$$

这里ds_0和δs_0为变形前线元$d\mathbf{X}$和$\delta\mathbf{X}$的长度，而ds和δs为变形后线元$d\mathbf{x}$和$\delta\mathbf{x}$的长度。

若将式(3·3b)除以$ds\delta s$，类似可得

$$\cos\theta - \frac{ds_0}{ds}\cdot\frac{\delta s_0}{\delta s}\cos\theta_0 = 2e_{ij}n_i m_j \tag{4·1b}$$

上两式中$\frac{ds}{ds_0}$和$\frac{\delta s}{\delta s_0}$为物质线元$PP_1$和$PP_2$变形后与变形前长度之比，称为伸长比则上两式写为，并分别以λ_1和λ_2表之，

$$\lambda_1\lambda_2\cos\theta - \cos\theta_0 = 2E_{IJ}N_I M_J \tag{4·2a}$$

$$\cos\theta - \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\cos\theta_0 = 2e_{ij}n_i m_j \tag{4·2b}$$

当P_1与P_2质点重合时，上两式成为

$$\lambda = \sqrt{1 + 2E_{IJ}N_I M_J} \tag{4·3}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e_{ij}n_i n_j}} \tag{4·4}$$

为求变形前沿坐标轴x_1方向之物质线元$d\mathbf{X}$之伸长，可令变形前的PP_1沿坐标轴x_1方向，则$N_1 = 1$，$N_2 = N_3 = 0$，由此得此方向物质线元之伸长比为

$$\lambda_x = \sqrt{1 + 2E_{11}} \tag{4·5}$$

而工程应变定义为

$$E_x = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \lambda_x - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 \tag{4·6}$$

若求变形后沿坐标轴x_1方向之物质线元dx之伸长，则可令变形后的PP_1沿x_1方向，则$n_1 = 1$，$n_2 = n_3 = 0$，由此得此方向物质线元之伸长比为

$$\lambda'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e_{11}}} \tag{4·7}$$

而工程应变定义为

$$e_x = \frac{ds - ds_0}{ds} = 1 - \frac{1}{\lambda'_x} = 1 - \sqrt{1 - 2e_{11}} \tag{4·8}$$

由式(4·6)与(4·8)可见，E_x是以变形前的构形（即参考构形）为基准的工程应变，而e_x是以变形后的构形(即瞬时构形)为基准的工程应变，在应变值很小的情况下由(4·6)和(4·8)式得

$$\left.\begin{aligned} E_x &\simeq E_{11} \\ e_x &\simeq e_{11} \end{aligned}\right\} \tag{4·9}$$

由式(4·5)和(4·7)可见，E_{11}、E_{22}、E_{33}反映了变形前沿坐标轴方向之物质线元之线应变，而e_{11}、e_{22}、e_{33}则反映了变形后沿坐标轴方向之物质线元之线应变。当应变值很小时，这些应变分量就等于变形前（后）坐标轴方向线元的工程应变E_x（或e_x）等。

现令变形前PP_1沿坐标轴X_1方向，PP_2沿坐标轴X_2方向，则$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$，由式(4·2a)和(4·5)得

$$\cos\theta = \frac{2E_{12}}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}}\sqrt{1 + 2E_{22}}} \tag{4·10a}$$

若X_1和X_2轴间之剪应变以γ_{12}表示。则$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta$，代入上式得

$$\sin\gamma_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}}\sqrt{1 + 2E_{22}}} \tag{4·10b}$$

若令变形后PP_1沿坐标轴x_1方向，PP_2沿坐标轴x_2方向，则$\theta = \frac{\pi}{2}$，由(4·2b)式得

$$\cos\theta_0 = -2\lambda_1\lambda_2 e_{12} \tag{4·11a}$$

而x_1和x_2轴间之剪应变 $\gamma'_{12} = \theta_0 - \frac{\pi}{2}$，代入上式得

$$\sin\gamma'_{12} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1 - 2e_{11}}\sqrt{1 - 2e_{22}}} \tag{4·11b}$$

在应变很小时，有

$$\gamma_{12} \simeq 2E_{12} \tag{4·12a}$$

$$\gamma'_{12} = 2e_{12} \tag{4·12b}$$

由上面可见，E_{12}、E_{23}、E_{31}反映了变形前沿坐标轴方向的各物质线元间的剪应变，而e_{12}、e_{23}、e_{31}反映了变形后沿坐标轴方向的各物质线元间的剪应变。在小应变情况下，这些应变分量就等于工程应变之半。

若取坐标轴沿变形前的三个主轴方向，则应变矩阵**E**为对角阵，于是由式（4·10b）可得$\gamma_{12}=0$，即各应变主轴变形前相互正交，变形后仍保持正交。这同样说明了P质点邻域可依下列三步由初始的不变形状态过渡到瞬时变形状态，即（1）跟随P质点的平移；（2）跟随主轴坐标架的转动；（3）同时沿主轴方向的伸长。

例2·3 假设对平面简单剪切(图2·6)，有$x_1 = X_1 + X_2\tan\alpha$，$x_2 = X_2$。试求：Green应变张量**E**，Almansi应变张量**e**和工程应变。

解：应用式(3·6)和(3·7)易得

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\tan\alpha \\ \frac{1}{2}\tan\alpha & \frac{1}{2}\tan^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\tan\alpha \\ \frac{1}{2}\tan\alpha & -\frac{1}{2}\tan^2\alpha \end{pmatrix} \tag{a}$$

变形前沿坐标轴方向物质线元之工程应变为

$$E_1 = 0 \quad E_2 = \sqrt{1+2E_{22}} - 1 = \frac{1}{\cos\alpha} - 1 > 0 \tag{b}$$

$$\sin\gamma_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}} = \sin\alpha, \quad \therefore \gamma_{12} = \alpha \tag{c}$$

变形后沿坐标轴方向之物质线元之工程应变为

$$e_1 = 0 \quad e_2 = 1 - \sqrt{1-2e_{22}} = 1 - \frac{1}{\cos\alpha} < 0 \tag{d}$$

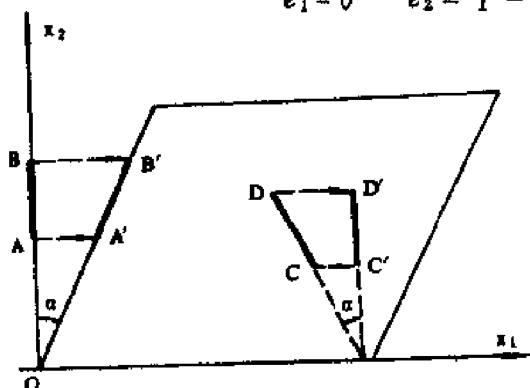


图2·6 简单剪切

$$\sin\gamma'_{12} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1-2e_{11}}\sqrt{1-2e_{22}}} \sin\alpha, \quad \therefore \gamma'_{12} = \alpha \tag{e}$$

由（b）和（d）式的$E_2>0$和$e_2<0$的结果及(图2·6)可见，变形前沿x_2轴方向之物质线元AB变形后移到$A'B'$位置，是伸长了；而变形后沿x_2方向之物质线元$C'D'$其变形前位置为CD，可见它是缩短了，但转角仍为α。

现求Green应变张量之主向。特征方程为

$$\begin{vmatrix} 0-E & \frac{1}{2}\tan\alpha \\ \frac{1}{2}\tan\alpha & \frac{1}{2}\tan^2\alpha - E \end{vmatrix} = E^2 - \frac{1}{2}\tan^2\alpha E - \frac{1}{4}\tan^2\alpha = 0$$

若$\alpha = 45°$，则解得应变主值为 $E_{\text{I}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}} = 0.809$，$E_{\text{II}} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = -0.309$。最大主应变$E_{\text{I}}$之方向余弦$\overset{\text{I}}{N}_J(J=1,2)$由解下列方程组得到

$$\left.\begin{aligned} &(E_{IJ} - E_I\delta_{IJ})N_J = 0 \\ &N_K N_K = 1 \end{aligned}\right\}$$

解得：$\overset{\text{I}}{N}_1 = 0.5257$，$\overset{\text{I}}{N}_2 = 0.8506$，该主向变形前与$x_1$轴之夹角为$\theta = 58°17'$。

§ 2·5 面积和体积的变化

现求变形过程中P质点邻域内体积的改变。过P质点取三个不在同一平面内的物质线元$d\mathbf{X}$，$\delta\mathbf{X}$和$\Delta\mathbf{X}$，由它们构成的平行六面体的体积如(图2.7)：

$$\begin{aligned} dV_0 &= d\mathbf{X}\cdot(\delta\mathbf{X}\times\Delta\mathbf{X}) \\ &= e_{LMN}dX_L\delta X_M\Delta X_N \end{aligned} \tag{5·1}$$

变形后的体积变为

$$\begin{aligned} dV &= d\mathbf{x}\cdot(\delta\mathbf{x}\times\Delta\mathbf{x}) = e_{ijk}dx_i\delta x_j\Delta x_k \\ &= e_{ijk}F_{iL}F_{jM}F_{kN}dX_L\delta X_M\Delta X_N \\ &= Je_{LMN}dX_L\delta X_M\Delta X_N = JdV_0 \end{aligned} \tag{5·2}$$

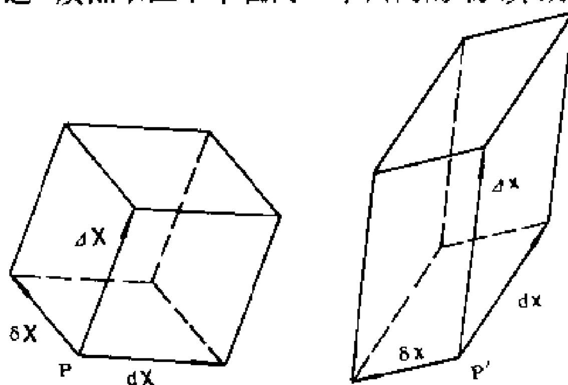


图2.7 质点邻域的体积改变

即变形后与变形前体积之比等于雅可比行列式J。上式中利用了行列式公式

$$e_{ijk}F_{iL}F_{jM}F_{kN} = (\det\mathbf{F})e_{LMN} = Je_{LMN} \tag{5·3}$$

物体作刚体运动时体积保持不变，故J也保持常值$J=1$，由此可见J与刚体运动无关而只与纯变形有关，因此J可用应变张量的分量表出。注意到

$$J = \left|\frac{\partial x_p}{\partial X_Q}\right| = \left|\delta_{pQ} + \frac{\partial u_p}{\partial X_Q}\right| \tag{5·4a}$$

将此式两边平方，利用行列式乘法和(3·8)式可得

$$\begin{aligned} J^2 &= \det(\mathbf{F}^T\mathbf{F}) = |(\delta_{kI} + u_{k,I})(\delta_{kJ} + u_{k,J})| = |\delta_{IJ} + 2E_{IJ}| \\ &= 1 + 2I_{(\text{I})} + 4I_{(\text{II})} + 8I_{(\text{III})} = (1+2E_{\text{I}})(1+2E_{\text{II}})(1+2E_{\text{III}}) \\ &= (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 \end{aligned} \tag{5·4b}$$

式中$I_{(\text{I})}$、$I_{(\text{II})}$、$I_{(\text{III})}$为Green应变张量$\mathbf{E}$的三个不变量，而E_I和λ_I为$\mathbf{E}$的主应变和主伸长比。

变形过程中面元将发生改变。变形前由物质线元$d\mathbf{X}$和$\delta\mathbf{X}$构成的平行四边形之面积矢量为

$$d\mathbf{A}=d\mathbf{X}\times\delta\mathbf{X} \tag{5·5a}$$

其分量为$dA_L=e_{LMN}dX_M\delta X_N$ (5·5b)

变形后变为

$$d\mathbf{a}=d\mathbf{x}\times\delta\mathbf{x} \tag{5·6a}$$

其分量为 $da_i=e_{ijk}dx_j\delta x_k=e_{ijk}F_{jM}F_{kN}dX_M\delta X_N$ (5·6b)

两边乘以F_{iL}，并注意到(5·3)式得

$$F_{iL}da_i=Je_{LMN}dX_M\delta X_N=JdA_L$$

由此得 $da_i=JF^{-1}_{Li}dA_L=J\dfrac{\partial X_L}{\partial x_i}dA_L$ (5·6c)

或 $d\mathbf{a}=J(\mathbf{F}^{-1})^T d\mathbf{A}$ (5·7)

反过来有 $d\mathbf{A}=\dfrac{1}{J}\mathbf{F}^T d\mathbf{a}$

面元的面积$|d\mathbf{a}|$的平方为

$$|d\mathbf{a}|^2=da_ida_i=J^2F^{-1}_{Li}F^{-1}_{Mi}dA_LdA_M=J^2C^{-1}_{LM}dA_LdA_M \tag{5·8a}$$

其中C^{-1}_{LM}为右Cauchy-Green张量$\mathbf{C}=2\mathbf{E}+\mathbf{I}$(见(3·4)式)的逆矩阵$\mathbf{C}^{-1}$的元素，若以$\widetilde{C}_{LM}$表示矩阵$\mathbf{C}$中元素$C_{LM}$的代数余子式，则

$$C^{-1}_{LM}=\widetilde{C}_{LM}/det\mathbf{C} \tag{5·8b}$$

而 $\det\mathbf{C}=|\mathbf{F}^T||\mathbf{F}|=J^2$ (5·8c)

$$\widetilde{C}_{LM}=\frac{1}{2}e_{LPQ}e_{MRS}C_{PR}C_{QS}=\frac{1}{2}e_{LPQ}e_{MRS}(2E_{PR}+\delta_{PR})(2E_{QS}+\delta_{QS}) \tag{5·8d}$$

将式(5·8c)和(5·8d)代入(5·8b)式，然后再将式(5·8b)代入式(5·8a)，得

$$|d\mathbf{a}|^2=\frac{1}{2}e_{LPQ}e_{MRS}(2E_{PR}+\delta_{PR})(2E_{QS}+\delta_{QS})dA_LdA_M \tag{5·9}$$

可见面元面积（模）的改变也只与纯变形有关，但其方向的改变则与转动有关。

§2·6 线性化条件

在小应变和小转动情况下，应变分量公式可以线性化。为此将变形梯度$\mathbf{F}$分解为

$$\mathbf{F}=\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\Omega} \tag{6·1}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{1}{2}(\mathbf{F}+\mathbf{F}^T)-\mathbf{I}$ (6·2)

为线性化应变张量，而

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}(\mathbf{F}-\mathbf{F}^T) \tag{6·3}$$

为线性化转动张量。

显然，$\boldsymbol{\varepsilon}$为对称张量，而$\boldsymbol{\Omega}$为反对称张量，即$\boldsymbol{\Omega}^T=-\boldsymbol{\Omega}$，于是我们有

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}=(\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\Omega})=\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon}^2+2\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\Omega}^2 \tag{6·4a}$$

由此

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I})=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^2-\boldsymbol{\Omega}^2)=\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^2-\boldsymbol{\Omega}^2) \tag{6·4b}$$

设$\boldsymbol{\Omega}$为与$\boldsymbol{\varepsilon}$同阶或更高阶的小量，则$\boldsymbol{\varepsilon}^2$与$\boldsymbol{\Omega}^2$项均可略去，于是有

$$\mathbf{E}\simeq\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6·5}$$

及

$$\mathbf{C}=\mathbf{U}^2=\mathbf{F}^T\mathbf{F}\simeq\mathbf{I}+2\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6·6a}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}^2=\mathbf{F}\mathbf{F}^T\simeq\mathbf{I}+2\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6·6b}$$

或达到与(6·5)同阶的近似下有

$$\mathbf{U}\simeq\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6·6c}$$

$$\mathbf{V}\simeq\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6·6d}$$

$$\mathbf{U}^{-1}\simeq\mathbf{I}-\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6·6e}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}\simeq(\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\Omega})\cdot(\mathbf{I}-\boldsymbol{\varepsilon})\simeq\mathbf{I}+\boldsymbol{\Omega} \tag{6·7}$$

于是，在转动比起应变为同阶或更高阶小量下，Green应变张量$\mathbf{E}$就等于线性化应变张$\boldsymbol{\varepsilon}$量，而$\mathbf{R}-\mathbf{I}$就等于线性化转动张量$\boldsymbol{\Omega}$。此时应变与转动分量的公式就线性化为

$$\varepsilon_{IJ}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J}+\frac{\partial u_J}{\partial X_I}\right) \tag{6·8}$$

$$\Omega_{IJ}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J}-\frac{\partial u_J}{\partial X_I}\right) \tag{6·9}$$

应注意的是刚体小转动时，线性化应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}\neq0$。以物体绕$z$轴作刚体转动为例(见图2.2)，此时质点的位移为

$$u_{\mathrm{I}}=X(\cos\theta-1)-Y\sin\theta,$$
$$u_{\mathrm{II}}=X\sin\theta+Y(\cos\theta-1)。$$

由式(6·8)可算得因刚体转动产生的虚假应变$\boldsymbol{\varepsilon}'$为

$$\varepsilon'_{11}=\varepsilon'_{22}=\cos\theta-1\simeq-\theta^2/2$$

其余虚假应变分量为零。当转动θ为与线性化应变$\boldsymbol{\varepsilon}$同阶的小量时，$\theta^2/2$为高一阶的小量而可忽略，因而线性化应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}$可作为应变的度量，但当θ为比$\boldsymbol{\varepsilon}$低一阶的小量时，$\theta^2/2$就为与$\boldsymbol{\varepsilon}$同阶的小量因而不能忽略，此时$\boldsymbol{\varepsilon}$不能作为应变的度量。事实上当$\boldsymbol{\Omega}^2$为与$\boldsymbol{\varepsilon}$同阶小量时，式(6·4b)中只有$\boldsymbol{\varepsilon}^2$项可略去，从而得

$$\mathbf{E}\simeq\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^2\neq\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6·10}$$

此时应变公式不能线性化，得到的是小应变大转动问题，这类大变形问题在薄壁结构、薄板和薄壳等问题中有重要应用。

注意到无限小转动矢量$\boldsymbol{\theta}$与$\boldsymbol{\Omega}$之间有如$\boldsymbol{\omega}$与$\mathbf{W}$之间相似的关系（参见式(3·2·6b)和(3·2·8)）

$$\theta_i=\frac{1}{2}e_{ijk}\Omega_{kj}, \tag{6·11a}$$

$$\Omega_{kj}=e_{ijk}\theta_i \tag{6·11b}$$

由此可得

$$\Omega^2=\begin{pmatrix} -(\theta_2^2+\theta_3^2) & \theta_1\theta_2 & \theta_1\theta_3 \\ \theta_2\theta_1 & -(\theta_3^2+\theta_1^2) & \theta_2\theta_3 \\ \theta_3\theta_1 & \theta_3\theta_2 & -(\theta_1^2+\theta_2^2) \end{pmatrix} \tag{6·12}$$

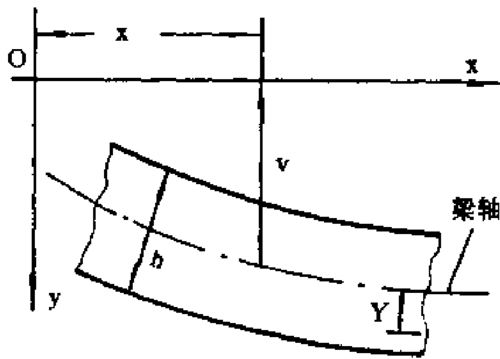


图2.8 梁的弯曲

现以梁的弯曲为例，设细长梁（$h \ll l$，h 为梁高，l为梁长）的轴线的挠度$v(X)$达梁高 h 的量级，此即为梁的大挠度小应变问题。忽略剪切和梁的横向变形，则梁上质点的位移为

$$u_I=u(X)-Y\frac{dv}{dX} \tag{a}$$

$$u_{II}=v(X) \tag{b}$$

式中u为梁轴上点的x向位移，Y为梁上质点至中性层之距离。梁的小转角θ_3为：

$$\theta_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{II}}{\partial X}-\frac{\partial u_I}{\partial Y}\right)=\frac{dv}{dX} \tag{c}$$

梁的线性化应变ε_{11}为

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_I}{\partial X}=\frac{du}{dX}-Y\frac{d^2v}{dX^2} \tag{d}$$

当挠度v与梁高h为同一数量级时，由（c）可得θ_3为h/l量级，而由（d）可得ε_{11}为$h\cdot h/l^2$量级即ε_{11}与 θ_3^2同量级，或θ_3为比ε_{11}低一阶的小量，此时梁的应变按式(6·10)计算，由此得

$$\begin{aligned} E_{11}&=\varepsilon_{11}-\frac{1}{2}\Omega_{11}^2=\frac{du}{dX}-Y\frac{d^2v}{dX^2}+\frac{1}{2}\theta_3^2 \\ &=\frac{du}{dX}-Y\frac{d^2v}{dX^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dX}\right)^2 \end{aligned} \tag{e}$$

若 v 为比 h 高一阶的小量，即 $v\sim\frac{h}{l}\cdot h$，则 $\left(\frac{dv}{dX}\right)^2\sim\left(\frac{h^2}{l^2}\right)^2$，$Y\frac{d^2v}{dX^2}\sim h\cdot\frac{h^2}{l^3}$，$u\sim\frac{1}{2}\int_l\left(\frac{dv}{dX}\right)^2dX\sim\left(\frac{h^2}{l^2}\right)^2 l$，$\frac{du}{dX}\sim\left(\frac{h^2}{l^2}\right)^2$，则式（$e$）右端的第一和第三项为比第二项高一阶的小量因而可以忽略，应变公式就线性化为：

$$E_{11}=-Y\frac{d^2v}{dX^2} \tag{f}$$

习　题

2·1　取同一个笛卡尔坐标系作为物质坐标系和空间坐标系，试证变形梯度**F**、Green应变张量**E**和Almansi应变张量**e**为二阶张量。

2·2　根据极分解定理，变形梯度$\mathbf{F}=\mathbf{RU}=\mathbf{VR}$，试证右和左Cauchy-Green伸长张量**U**和**V**之主值相同，而**V**之主向为自**U**之主向转动**R**而得。

2·3　设位移场是物质坐标的齐次线性函数$u_I=a_{IJ}X_J$，试证变形前的平面，变形后仍为平面；变形前互相平行的平面，变形后仍保持平行。

2·4　试证在均匀变形场$x_i=F_{iJ}X_J$中（式中F_{iJ}为常数），变形前的球面$X_IX_I=R^2$，变形后变为椭球面。

2·5　对均匀无限小变形场，$u_i=A_{iJ}X_J$，式中$A_{iJ}\ll 1$为常数，故其乘积项可以忽略。试指出，两个相继的无限小位移的合成可看成此两无限小位移之和而与施加此两无限小位移的次序无关。

2·6　设变形场为$x_1=X_1$，$x_2=X_2+aX_3$，$x_3=X_3+aX_2$，式中a为常数。（1）试计算Green应变张量**E**和Almansi应变张量**e**；（2）计算dX_2和dX_3之伸长应变；（3）计算变形前$\mathbf{N}=\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$方向之伸长，并计算其变形后之方向**n**；（4）a值应在什么范围内，这种运动才是可能的？

2·7　设位移场为$\mathbf{u}=X_1^2X_2\mathbf{e}_1+(X_2-X_3)^2\mathbf{e}_2+X_2^2X_3\mathbf{e}_3$，试求变形前坐标为$Q_1(1,1,-1)$，$Q_2\left(1,\frac{3}{2},-1\right)$，$Q_3\left(1,\ \frac{7}{4},\ -1\right)$诸点相对于$P(1,2,-1)$的相对位移$\mathbf{u}_{Q_I}-\mathbf{u}_P$，并求$P$点沿$x_2$坐标轴负向的$d\mathbf{u}_P$，将其方向同$\mathbf{u}_{Q_I}-\mathbf{u}_P$比较，说明$Q_I\rightarrow P$时，$\mathbf{u}_{Q_I}-\mathbf{u}_P$之方向$\rightarrow d\mathbf{u}_P$之方向。

2·8　对无限小变形，$\mathbf{E}=\mathbf{e}$。设$\mathbf{u}=(x_1-x_3)^2\mathbf{e}_1+(x_2+x_3)^2\mathbf{e}_2-x_1x_2\mathbf{e}_3$，决定其在$P(0,2,-1)$点的应变张量和转动张量，并求点$P$沿方向$\mathbf{n}=(8\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3)/9$方向的单位伸长应变。

2·9　已知Green应变张量$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}$，试求其应变主值及主方向。

2·10　对剪变形$x_1=X_1$，$x_2=X_2+aX_3$，$x_3=X_3+aX_2$的变形梯度**F**作极分解，试求右Cauchy-Green伸长张量**U**及转动张量**R**。

2·11　对简单剪切$x_1=X_1$，$x_2=X_2$，$x_3=X_3+2X_2/\sqrt{3}$，试确定x_2x_3平面内其伸长应变为零的线元在变形前的方向**N**。

2·12　设变形场为$x_1=X_1+2X_3$，$x_2=X_2-2X_3$，$x_3=X_3-2X_1+2X_2$，试确定其Green应变张量**E**和Almansi应变张量**e**及它们之主值和主向。

2·13　均匀变形场$x_1=\sqrt{3}X_1$，$x_2=2X_2$，$x_3=\sqrt{3}X_3-X_2$，变形前之球面$X_1^2+X_2^2+X_3^2=1$变形后变为椭球面，试求椭球的三个半轴长及半轴方向。

2·14 试求上题变形场的右Cauchy-Green伸长张量$\mathbf{U}$和转动张量$\mathbf{R}$。

2·15 对题2·13的变形场，试证瞬时构形中的球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$在变形前为一椭球面。试求此椭球面的三个半轴长，并求这些半轴的方向。

2·16 试证明，若均匀变形场$\mathbf{x}=\mathbf{F}\mathbf{X}$（其中$\mathbf{F}$的分量为常数）为关于$X_2X_3$坐标面镜面对称的，则$F_{12}=F_{13}=F_{21}=F_{23}=0$。

提示：设$\mathbf{X}$关于镜面X_2X_3的象为$\mathbf{R}_1\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{R}_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$\mathbf{x}$的象为$\mathbf{R}_1\mathbf{x}$。而$\mathbf{x}=\mathbf{F}\mathbf{X}$，及$\mathbf{R}_1\mathbf{x}=\mathbf{F}\mathbf{R}_1\mathbf{X}$，由此得 $\mathbf{x}=\mathbf{R}_1^T\mathbf{F}\mathbf{R}_1\mathbf{X}$，$\mathbf{F}=\mathbf{R}_1^T\mathbf{F}\mathbf{R}_1$。

2·17 设有限变形由$u_I=A_{IJ}X_J$给出，A_{IJ}为常数，求变形后与变形前的体积比。若$A_{IJ}\ll 1$，试指出其体积应变为$\mathbf{A}$的主对角元之和。

2·18 设x_m为二次可导，试指出方程$E_{IJ}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_m}{\partial X_I}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial X_J}-\delta_{IJ}\right)=0$意味着导数$\frac{\partial x_m}{\partial X_J}$与$X_J$无关，且$x_i=A_{iJ}X_J+b_i$，并证明$\mathbf{A}$为正交阵。

第三章 瞬时运动

本章讨论运动和变形的速率问题。在连续介质力学的许多问题中，关心的不只是介质形状、大小和位置的改变，而且还包括这种改变的速率。例如在流体力学中，我们关心的是瞬时构形中某空间区域的速度场和变形速率场。在粘性体（如粘性流体、粘弹性固体）中，应力的大小直接和变形速率有关。另一方面我们也常需要知道某物质域或某质点的物理、力学和运动学量（例如速度、动量和能量）的变化速率。这意味着我们既关心空间域的变化速率，也关心质点或物质域的变化速率，后者是本章给于很大篇幅来叙述物质导数和体积分物质导数的原因。

§3·1 局部导数、迁移导数和物质导数

设在构形$\mathcal{X}$的域中定义一参量p，其物质描述记为$p=p(\mathbf{X},t)$，而其空间描述记为$p=p(\mathbf{x},t)$。今后，在不会引起混淆的地方，我们用同一个函数符号p表示物质描述和空间描述，只是应当记住，这两种描述的函数形式p是不同的。参量p可以是标量、矢量或张量及其分量。若我们要求得参数p在$\mathcal{X}$域中任一质点$\mathbf{X}$处的时间变化率，就需将该量的物质描述$p(\mathbf{X},t)$对时间求偏导数而保持$\mathbf{X}$固定不变，这种导数称为量p的物质导数，并用在p上加一点或符号$\dfrac{Dp}{Dt}$表示

$$\dot{p}=\frac{Dp}{Dt}=\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=\text{常数}}=\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{X},t) \qquad (1\cdot1a)$$

当参量p采用空间描述时，则可用复合函数求导数的规则求物质导数

$$\frac{Dp}{Dt}=\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x},t)+\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)\frac{\partial x_i}{\partial t}(\mathbf{X},t), \qquad (1\cdot1b)$$

但$\dfrac{\partial x_i}{\partial t}(\mathbf{X},t)=v_i(\mathbf{X},t)$为质点$\mathbf{X}$的运动速度，则采用空间描述时，$p$的物质导数式为

$$\frac{Dp}{Dt}=\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x},t)+v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)。 \qquad (1\cdot1c)$$

上式右边第一项为物质导数的当地变化率部分，被称之为当地导数，它描述着空间某点的参量p随时间的变化率，第二项为物质导数的迁移部分，它是由非均匀参量场$p(\mathbf{x},t)$中质点的运动而引起的，被称之为迁移导数。

质点的速度$\mathbf{v}$是指质点$\mathbf{X}$在空间的位置矢径$\mathbf{x}$随时间改变的速度，即可用$\mathbf{x}$的物质导数表示

$$\mathbf{v}=\frac{D\mathbf{x}}{Dt}=\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\mathbf{X},t) \qquad (1\cdot2a)$$

其分量为

$$v_i = \frac{Dx_i}{Dt} = \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}(\mathbf{X}, t)。 \quad (1 \cdot 2b)$$

同样，质点的加速度$\mathbf{a}$为某质点$\mathbf{X}$（令其固定）的速度$\mathbf{v}$对时间的变化率，即可表成速度$\mathbf{v}$的物质导数

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1 \cdot 3a)$$

式中∇为Hamilton算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \quad (1 \cdot 3b)$$

$\mathbf{e}_i$为笛卡尔坐标轴方向的单位矢量。

加速度的分量为

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t)。 \quad (1 \cdot 3c)$$

例3·1　一刚体以恒速$\mathbf{v}$沿坐标轴x_1方向运动，并以$t=0$时之构形为参考构形$\mathcal{X}_0$。若刚体内温度场的物质描述为$T = aX_1$，a为常数。试确定其空间描述。同时计算温度T的物质导数DT/Dt和局部导数$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$，并解释其物理意义。

解：取$\mathcal{X}_0$为参考构形，则刚体运动由下式给出

$$x_1 = X_1 + Vt, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

温度场的物质描述为：$T = aX_1$

温度场的空间描述为：$T = a(x_1 - Vt)$

因此　　$DT/Dt = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = -aV$

由于温度场在每一质点处保持常数，而T的物质导数DT/Dt为任一质点$\mathbf{X}$的温度的时间变化率，故其值为零。另一方面，空间任一点$\mathbf{x}$的温度改变是由物体运动引起的，其时间变化率为$-aV$。

§ 3·2　形变率和涡旋张量及其物理解释

连续介质的瞬时运动可由速度场$\mathbf{v}(\mathbf{x})$来描述，它将任一质点P的速度矢量$\mathbf{v}$表为该质点瞬时位置$\mathbf{x}$的函数。

考虑分别具有瞬时坐标$\mathbf{x}$和$\mathbf{x}+d\mathbf{x}$的质点P和P_1，质点P_1相对于质点P的相对速度为

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L}d\mathbf{x} \qquad \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2 \cdot 1)$$

写成分量形式为

$$dv_k = v_{k,j}dx_j \qquad L_{kj} = v_{k,j} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \tag{2·2}$$

式中**L**和L_{kj}为速度梯度张量及其分量，它们在质点P处取值。**L**为二阶张量，可将其分解为对称和反对称两部分之和

$$\mathbf{L} = \mathbf{V} + \mathbf{W}, \qquad L_{kj} = V_{kj} + W_{kj} \tag{2·3a, b}$$

其中**V**为对称部分，称为形变率张量，它反映着质点P邻域的变形速率，其分量为

$$V_{kj} = \frac{1}{2}(v_{k,j} + v_{j,k}) \tag{2·4}$$

而**W**为反对称部分，称之为涡旋张量，它反映质点P邻域的转动速率，其分量为

$$W_{kj} = \frac{1}{2}(v_{k,j} - v_{j,k}) \tag{2·5}$$

质点P邻域的转动速率还可用角速度矢量$\boldsymbol{\omega}$来描述

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\text{curl}\mathbf{v} \tag{2·6a}$$

将式(2·6a)展开，利用式(2·3b)，并注意到e_{ijk}与对称张量V_{kj}之积为零，我们得到

$$\omega_i = \frac{1}{2}e_{ijk}v_{k,j} = \frac{1}{2}e_{ijk}L_{kj} = \frac{1}{2}e_{ijk}W_{kj} \tag{2·6b}$$

显然有

$$\text{div}\boldsymbol{\omega} = \omega_{i,i} = \frac{1}{2}e_{ijk}v_{k,ji} = 0 \tag{2·7}$$

上式成立是由于$v_{k,ji}$对j、i来说是对称的，而e_{ijk}对任意两下标则是反对称的，故上式对j、i指标作和时其值为零。式(2·6b)两边同乘e_{imn}，并注意到$e_{imn}e_{ijk} = \delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}$和$W_{kj}$的反对称性，容易得到

$$W_{kj} = e_{ijk}\omega_i \tag{2·8}$$

利用式(2·3)相似地可将相对速度(2·1)分解为

$$d\mathbf{v} = \mathbf{V}d\mathbf{x} + \mathbf{W}d\mathbf{x} = d\mathbf{v}^* + d\mathbf{v}^{**} \tag{2·9}$$

其中$d\mathbf{v}^*$为对称部分，其分量为

$$dv_k^* = V_{kj}dx_j \tag{2·10}$$

$d\mathbf{v}^{**}$为反对称部分，其分量为

$$dv_k^{**} = W_{kj}dx_j \tag{2·11}$$

将式(2·8)代入(2·11)式得

$$dv_k^{**} = e_{ijk}\omega_i dx_j \tag{2·12a}$$

或

$$d\mathbf{v}^{**} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} \tag{2·12b}$$

由式(2·12b)可见，质点P邻域的相对速度dv_k^{**}为该邻域绕过P点的某瞬时转动轴以角速度$\boldsymbol{\omega}$作瞬时刚体转动产生的速度。角速度矢量$\boldsymbol{\omega}$也称为速度场的涡旋矢量(Vorticity)。

这样，若质点P处之速度梯度的对称部分V_{kj}为零，只有反对称部分W_{kj}，则P质点邻域

的瞬时运动为刚体转动。另一方面，若P点邻域的瞬时运动为刚体转动，则P质点的速度梯度的对称部分V_{kj}必为零。为证明这点，在质点P邻域除P_1质点外再取P_2质点，这三质点的瞬时坐标分别为$\mathbf{x}$、$\mathbf{x}+d\mathbf{x}$和$\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}$，且$P_2$质点相对于$P$质点的相对速度为

$$d\mathbf{v}=\mathbf{L}\delta\mathbf{x} \tag{2·13a}$$

其分量为 (2·13b)

$$dv_k=v_{k,j}\delta x_j$$

现计算标积$dx_k\delta x_k$的物质导数。注意到求物质导数时其物质坐标$\mathbf{X}$和$d\mathbf{X}$应当不变，则有

$$\frac{D}{Dt}(dx_k)=\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_J}dX_J\right)=\frac{\partial}{\partial X_J}\left(\frac{Dx_k}{Dt}\right)dX_J$$

$$=\frac{\partial v_k}{\partial X_J}dX_J=dv_k=v_{k,j}dx_j \tag{2·14}$$

由此得

$$\frac{D}{Dt}(dx_k\delta x_k)=v_{k,j}dx_j\delta x_k+v_{k,j}\delta x_jdx_k$$

$$=(v_{k,j}+v_{j,k})dx_j\delta x_k=2V_{kj}dx_j\delta x_k \tag{2·15a}$$

或将dx_j，δx_k用初始构形中的坐标dX_P和dX_Q表达，可得

$$\frac{D}{Dt}(dx_k\delta x_k)=2V_{kj}x_{j,P}x_{k,Q}dX_P\delta X_Q \tag{2·15b}$$

当质点P邻域作刚体运动时，$dx_k\delta x_k$（等于$ds\delta s\cos\theta$，(图2·4)）保持不变。故式(2·15a)左边为零，因此右边也等于零。而由于dx_j和δx_k的任意性，即得质点P邻域作刚体运动时

$$V_{jk}=0 \tag{2·16}$$

这就是要证明的。综合上述两方面可知(2·16)式是质点P邻域瞬时刚化的必要和充分条件。

为讨论形变率分量的力学意义，求下面的物质导数

$$\frac{D}{Dt}(dx_k\delta x_k)=\frac{D}{Dt}(ds\delta s\cos\theta) \tag{2·17}$$

上式左边的导数已由(2·15a)式给出。若将其中的dx_k和δx_k用方向余弦表示，即$dx_k=n_kds$，$\delta x_k=m_k\delta s$（这里n_k和m_k分别为PP_1和PP_2的瞬时矢量$d\mathbf{x}$和$\delta\mathbf{x}$的方向余弦）则有

$$\frac{D}{Dt}(dx_k\delta x_k)=2V_{kj}n_jm_kds\delta s \tag{2·18}$$

而式(2·17)右边导数则为

$$\frac{D}{Dt}(ds\delta s\cos\theta)=\frac{D}{Dt}(ds)\delta s\cos\theta+ds\frac{D}{Dt}(\delta s)\cos\theta-ds\delta s\sin\theta\frac{D\theta}{Dt}$$

$$=\left\{\left[\frac{1}{ds}\frac{D}{Dt}(ds)+\frac{1}{\delta s}\frac{D}{Dt}(ds)\right]\cos\theta-\frac{D\theta}{Dt}\sin\theta\right\}ds\delta s \tag{2·19}$$

由此得

$$\left[\frac{D(ds)}{Dt}\Big/ds+\frac{D(\delta s)}{Dt}\Big/\delta s\right]\cos\theta-\frac{D\theta}{Dt}\sin\theta=2V_{jk}n_jm_k \tag{2·20}$$

现令P_2与P_1重合，则$\theta=0$，上式成为

$$\frac{D(ds)}{Dt}\Big/ds=V_{jk}n_jn_k \tag{2·21}$$

这里n_j是瞬时物质线元$P'P_1'$的方向余弦（图2·4）。上式左边是该物质线元每单位瞬时长度的伸长率，它等于对称张量V_{jk}在此方向的法向分量（同小变形下求任意方向n上的线应变公式$\varepsilon_n=\varepsilon_{ij}n_in_j$相比较）。当瞬时物质线元$dx$方向取为坐标轴方向时，即得该物质线元$dx$每单位瞬时长度的伸长率，它们等于$V_{11}, V_{22}, V_{33}$。这就给出了$i=j$时变形率$V_{ij}$的力学意义。若在瞬时$t$令物质线元$P'P'_2$垂直于$P'P'_1$，则$\theta=\frac{\pi}{2}$，由式(2·20)即得物质线元$P'P'_1$和$P'P'_2$间的瞬时直角以下述角速率减小

$$\dot{\gamma}=-\frac{D\theta}{Dt}=2V_{jk}n_jm_k \tag{2·22}$$

上式中的$\left(-\frac{D\theta}{Dt}\right)$工程上常称之为剪切率，故记为$\dot{\gamma}$，负号是考虑到$\theta$减小时剪切率为正。若在瞬时$t$时，令$P'P'_1$与$P'P'_2$分别沿$x_1$和$x_2$坐标轴，则得$x_1$与$x_2$坐标轴方向的瞬时剪切率$\dot{\gamma}$等于$2V_{12}$。即$i\neq j$时之形变率$V_{ij}$等于坐标轴间工程剪切率之半。

这样，如同相对速度dv_k的反对称部分dv_k^{**}是给定质点p邻域的瞬时转动所致一样，相对速度的对称部分dv_k^*则是由给定质点p邻域的瞬时变形所致。为研究此纯变形，设$dx_j=n_jds$，则由(2·10)得

$$dv_k^*=V_{kj}n_jds \tag{2·23}$$

由于V_{kj}为实二阶对称张量，故必存在三个互相正交的主轴，取此三主轴为局部坐标系x'_i时，形变率张量V成为对角阵，即有$V'_{ij}=0(i\neq j)$和$V'_{ii}=V_i$(对i不求和)，这里V_i为形变率主值。于是，设取质点P_1在主轴1上，则有$n'_1=1$，$n'_2=n'_3=0$，则在瞬时纯变形时质点P_1相对于质点P的三个相对速度分量为：$dv_1^*=V'_{11}\ n'_1ds=V_1ds$，$dv^*=V'_{21}\ n'_1ds=0$，$dv_3^*=V'_{31}\ n'_1ds=0$。即在纯变形时，主轴上的点将沿主轴方向运动而不改变主轴的方向。

形变率的三个主值由解下列三次方程得到

$$V^3-J_{(1)}V^2-J_{(2)}V-J_{(3)}=0 \tag{2·24}$$

式中$J_{(1)}$、$J_{(2)}$和$J_{(3)}$为形变率张量V的三个主不变量，

$$\begin{aligned}J_{(1)}&=V_{ii}\\J_{(2)}&=\frac{-1}{2}e_{ijk}e_{imn}V_{jm}V_{kn}=\frac{1}{2}(V_{jk}V_{kj}-V_{jj}V_{kk})\\J_{(3)}&=\frac{1}{6}e_{ijk}e_{lmn}V_{il}V_{jm}V_{kn}\end{aligned} \tag{2·25}$$

而主轴上的三个方向余弦n_i由解下列方程组得到

$$\begin{cases}(V_{ij}-V\delta_{ij})n_j=0\\n_jn_j=1\end{cases} \tag{2·26}$$

例3·2 试证明变形介质中每一点至少存在一个瞬时处于不动的物质方向。

证：设过 p 点的物质线元 $pp_1=d\mathbf{x}$ 的方向瞬时处于不动，则 p_1 相对于 p 点的相对速度 $d\mathbf{v}$ 应沿 $d\mathbf{x}$ 方向，即应有

$$d\mathbf{v}=\lambda d\mathbf{x} \tag{a}$$

或写成分量形式

$$v_{k,j}dx_j=\lambda dx_k$$

由此

$$(v_{k,j}-\lambda\delta_{kj})dx_j=0 \tag{b}$$

为使 dx_j 有非零解，上列齐次线性方程组的系数行列式应为零，即应有

$$|v_{k,j}-\lambda\delta_{kj}|=0 \tag{c}$$

此三次方程至少有一个实根，与其对应的特征向量 dx_j 即为（b）的非平凡解。由此证明了变形介质中任一点 p 至少有一物质方向瞬时处于不动。

§3·3 Green和Almansi应变张量的物质导数

现求Green和Almansi应变张量分量的物质导数。对(2:3·2)式求物质导数可得*

$$\frac{D}{Dt}(dx_k\delta x_k)=2\frac{DE_{PQ}}{Dt}dX_P\delta X_Q \tag{3·1}$$

将此式与(2·15b)式比较即得Green应变张量分量的物质导数

$$\frac{DE_{PQ}}{Dt}=V_{kj}x_{j,P}x_{k,Q} \tag{3·2}$$

因此，当质点邻域作瞬时刚体运动时($V_{kj}=0$)，Green应变张量的物质导数也为零。而当瞬时构形与参考构形重合时($x_i=X_I$)，得

$$\frac{DE_{PQ}}{Dt}=V_{PQ} \tag{3·3}$$

下面我们来求Almansi应变张量的物质导数。首先注意到物质坐标 X_I 的物质导数 $\frac{DX_I}{Dt}$ 为零，利用式(1·1c)则有

$$\frac{\partial X_I}{\partial t}+v_P\frac{\partial X_I}{\partial x_P}=0 \tag{3·4a}$$

由此

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial X_I}{\partial x_p}\right)&=\frac{\partial^2 X_I}{\partial x_p\partial t}+v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial X_I}{\partial x_p}\right)\\&=\frac{\partial^2 X_I}{\partial x_p\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_p}\left(v_k\frac{\partial X_I}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial X_I}{\partial x_k}\\&=\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial X_I}{\partial t}+v_k\frac{\partial X_I}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial X_I}{\partial x_k}\\&=-\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial X_I}{\partial x_k}\end{aligned} \tag{3·4b}$$

*符号(2:3·2)表示第二章式(3·2)，若在同一章中引用公式时则不用冒号前的数值标明章号。

对式(2·3·7)求物质导数后用上式化简，然后再用(2·3·7)式将形如$\frac{\partial X_I}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial X_I}{\partial x_q}$的项用$e_{kq}$与$\delta_{kq}$表示，我们可求得Almansi应变张量的物质导数为

$$\frac{De_{pq}}{Dt}=-\frac{1}{2}\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial X_I}{\partial x_p}\right)\frac{\partial X_I}{\partial x_q}+\frac{\partial X_I}{\partial x_p}\cdot\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial X_I}{\partial x_q}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\left(\frac{1}{2}\delta_{kq}-e_{kq}\right)+\frac{\partial v_k}{\partial x_q}\left(\frac{1}{2}\delta_{kp}-e_{kp}\right)$$

$$=V_{pq}-e_{kq}\frac{\partial v_k}{\partial x_p}-e_{kp}\frac{\partial v_k}{\partial x_q} \tag{3·5}$$

可见当质点邻域作瞬时刚体运动时($V_{pq}=0$)，Almansi应变张量分量的物质导数并不为零。因此$\frac{De_{pq}}{Dt}$不能用于本构方程中作为应变e_{pq}变化率的度量，而$\frac{DE_{PQ}}{Dt}$则可直接应用于本构方程中。这也是Lagrange描述的一个优点。

§3·4 可积性条件、小变形下变形相容性条件

六个形变率张量的分量V_{ij}是由三个速度分量v_i导出的。这表明V_{ij}之间并不完全独立，换句话说不是任意给出六个形变率张量的分量就能保证速度场v_i的存在。在V_{ij}之间为保证速度场存在所必须满足的一组关系式，称之为可积性条件。当可积性条件被满足时，就能由六个形变率张量通过积分求得速度场分量v_i。

为了求得可积性条件，我们首先可由式(2·3)和(2·8a)得到下述关系

$$v_{j,i}=V_{ji}+W_{ji}=V_{ji}+e_{ijk}\omega_k \tag{4·1}$$

对于我们这里考虑的单连域来说，由$v_{j,i}$的各分量去确定一个单值连续可微的速度场v的充要条件，根据面积分的Stokes公式为

$$v_{j,iq}=v_{j,qi} \tag{4·2a}$$

忆及排列张量e_{pqi}作用于对称张量时其值为零的特性，上式等价于

$$e_{pqi}v_{j,iq}=0 \tag{4·2b}$$

将式(4·1)之$v_{j,i}$代入上式得

$$e_{pqi}(V_{ji,q}+e_{ijk}\omega_{k,q})=0 \tag{4·3a}$$

或
$$e_{pqi}V_{ji,q}+e_{ipq}e_{ijk}\omega_{k,q}=0 \tag{4·3b}$$

由
$$e_{ipq}e_{ijk}=\delta_{pj}\delta_{qk}-\delta_{pk}\delta_{qj} \tag{4·4a}$$

则式(4·3b)变为

$$\omega_{p,j}=e_{pqi}V_{ji,q} \tag{4·4b}$$

上式中已利用了式(2·7)表达的涡旋场散度$\omega_{k,k}$为零的条件。为了得到只含形变率分量V_{ij}的可积性条件，必须消去$\omega_{p,j}$。注意到对于一个单值连续的位移场来说，ω_p也必须是单值连续的，因而与$v_{j,i}$一样，它也必须满足微分次序无关的条件，即

$$\omega_{p,js}=\omega_{p,sj} \tag{4·5a}$$

或
$$e_{rjs}\omega_{p,js}=0 \tag{4·5b}$$

将式(4.4b)中的$\omega_{p,j}$代入上式得

$$e_{rjs}e_{pqi}V_{ji,qs}=0 \tag{4·6a}$$

上式亦可写成

$$e_{jrs}e_{ipq}V_{ij,qs}=0 \tag{4·6b}$$

这最后得到的形变率分量V_{ij}间的关系式，即为速度场的可积性条件。对调式(4·6b)中指标i和j及q与s，并利用张量V_{ij}的对称性及求导运算“$,qs$”的次序可交换性则得

$$e_{jrs}e_{ipq}V_{ij,qs}=e_{irq}e_{jps}V_{ji,sq}=e_{jps}e_{irq}V_{ij,qs} \tag{4·7a}$$

可见式(4·6b)中的两个自由指标可以互换。这相应于二阶对称张量，故式(4·5)只对应着六个方程。这些方程可分为两类，一类为$p=r$，一类为$p\neq r$。作为例子，令$p=r=1$和$p=1$，$r=2$，各得每类中的一个方程

$$V_{33,22}+V_{22,33}-2V_{23,23}=0 \tag{4·7b}$$

$$(V_{23,1}+V_{31,2}-V_{12,3})_{,3}-V_{33,12}=0 \tag{4·7c}$$

其余四个方程可由循环置换下标而得到。这些方程，亦称为形变率张量的相容方程。

在瞬时运动为平面运动的情况下，形变率张量中的非零分量仅有V_{11}，V_{22}和V_{12}，且它们与x_3无关，五个相容方程被恒等地满足，可积性条件归结为

$$V_{22,11}+V_{11,22}-2V_{12,12}=0 \tag{4·8}$$

不难确证，在单连域中，满足可积性条件(4·6b)的形变率张量场V_{ij}所求得的v_i虽不是唯一的，但其间仅差一个刚体运动的速度场，这一点请读者自己加以证明。

利用数学上的相似性，容易证明位移很小时变形场的可积性条件。在位移很小的条件下，可不区别物质描述与空间描述，Green应变张量与Almansi应变张量间的差别也消失。由(2·6·8)和(2·6·9)式可见，线性化应变张量ε_{ij}和线性化转动张量Ω_{ij}同位移u_i的关系与形变率张量V_{ij}，涡旋张量W_{ij}同速度v_i的关系在数学上完全相似，且有

$$V_{ij}=\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{ij} \tag{4·9}$$

将式(4·9)代入(4·6a)中我们得到与形变率场可积性条件完全相似的变形场可积性条件，即变形相容性条件

$$e_{ikm}e_{jln}\varepsilon_{ij,kl}=0 \tag{4·10}$$

如同对式(4·6b)的讨论一样，上式只有两个自由指标m、n，故只有6个独立的方程。再注意到当i，k，m三指标为不同值时，e_{ikm}才不为零，因此当m一定时，i，k只能取两个不同值，或i、k，或k、i。对e_{jln}也完全一样，故i、k与j、l的组合只可能有四种：i，k与j，l；k，i与j，l；k，i与l，j和i，k与l，j。这样，式(4·10)就可展开成

$$\varepsilon_{ij,kl}-\varepsilon_{kj,il}+\varepsilon_{kl,ij}-\varepsilon_{il,kj}=0 \tag{4·11}$$

这就是三维变形相容性方程的形式。

§3·5 体积分的物质导数、含物理间断面的体积分的物质导数

考虑体积分

$$I=\int_V \phi dV \tag{5·1}$$

的物质导数，这里ϕ为标量、矢量或张量的分量。积分是在瞬时t计算的，积分区域为此瞬时连续介质组成的集合所占有的体积V，域的界面为S，质点在t瞬时的坐标为x_i。在$t+\Delta t$瞬时，质点坐标变为$x_i+\Delta x_i$，该连续介质的集合也就占有新体积V'，而t瞬时处于界面S上的质点在$t+\Delta t$瞬时占有邻近的界面S'。体积分的物质导数DI/Dt可计算如下

$$\frac{DI}{Dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V'}\phi(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x},\ t+\Delta t)dV'-\int_V\phi(\mathbf{x},\ t)dV\right] \tag{5·2}$$

这个体积分的改变由两部分构成。其一是由V和V'共有的体积V_1中的ϕ随时间改变而引起的，即$\int_{V_1}\frac{\partial\phi}{\partial t}dtdV_1$，且有$\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_1=V$。其二是由区域边界$S$的推移产生的体积改变（此改变的体积不为$V$和$V'$所共有）而引起的。$ds$边界引起的体积改变为$dV_2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dtds$（图3·1）这里$\mathbf{n}$为边界外法线。由此，整个边界面$S$的推移引起的体积分改变为$\int_S\phi v_jn_jdtds$。

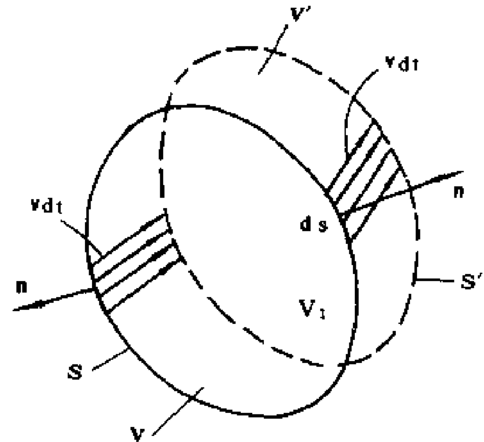


图3.1　连续介质域的推移

将这两部分相加得

$$\frac{DI}{Dt}=\int_V\frac{\partial\phi}{\partial t}dV+\int_S\phi v_jn_jds \tag{5·3a}$$

对上式右端第二项应用高斯公式得

$$\begin{aligned}\frac{DI}{Dt}&=\int_V\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi v_j)\right]dV\\&=\int_V\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}(\phi\mathbf{v})\right]dV\end{aligned} \tag{5·3b}$$

再注意到ϕ的物质导数表达式(1.1c)，我们得到

$$\frac{DI}{Dt}=\int_V\left[\frac{D\phi}{Dt}+\phi\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right]dV \tag{5·3c}$$

式(5·3a)—(5·3c)是体积分的物质导数公式。作为特例，设$\phi=1$，则体积分$I=\int_V dV=V$表连续介质域在t瞬时占有的体积，而$\frac{DI}{Dt}=\frac{DV}{Dt}$为这一体积的瞬时变化率。将$\phi=1$代入(5·3c)即得

$$\frac{DV}{Dt}=\int_V v_{j,j}dV \tag{5·4a}$$

由此可见，速度场的散度$v_{j,j}$即为单位体积的体积膨胀率。

由(5·3c)式可见，仅当体积不变时($v_{j,j}=0$)，求物质导数的运算同体积分运算的次序才可互换，即

$$\frac{D}{Dt}\int_V\phi dV=\int_V\frac{D\phi}{Dt}dV \tag{5·4b}$$

现考虑连续介质域V内存在某个以速度$\mathbf{c}$运动的物理不连续曲面（或称为物理间断面）σ的情况[6]，连续介质的某物理量（标量、矢量或张量的分量）ϕ及质点速度$\mathbf{v}$在越过此面时产生有限跳变，其在σ正侧与负侧之值分别以ϕ^+、$\mathbf{v}^+$与ϕ^-、$\mathbf{v}^-$表之。考虑在此间断面存在的条件下ϕ的体积分的物质导数。

区域V被间断面σ分为V^+和V^-两个区域。区域的边界面包括间断面σ在内以S表示，$S=\sigma+S^++S^-$，其中S^+为V^+的外表面，S^-为V^-的外表面。S^+和S^-的单位外法线以$\mathbf{n}$表之，而$\mathbf{n}_\sigma$为σ的指向V^+内的单位法线矢量。用符号$V-\sigma$表示扣除了间断面σ后的体积区域，计算在此域中物理量的体积分的物质导数

$$\frac{DI}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int_{V-\sigma}\phi dV \qquad (5\cdot5a)$$

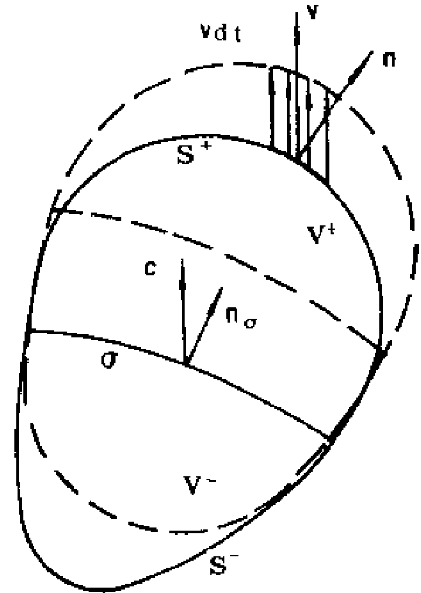


图3·2　间断面的推移

在t瞬时连续介质域处于实线所围区域（图3·2），而在$t+dt$瞬时，则处于虚线所围区域。现先设想间断面σ对连续介质并无相对运动，即间断面之运动速度$\mathbf{c}$与σ上质点的运动速度$\mathbf{v}$相同，运动中的间断面由同样的质点集组成，则如前面所述参见式(5·3a)，这时物质导数(5·5a)由两部分组成

$$\int_{V-\sigma}\frac{\partial\phi}{\partial t}dV+\int_{S-\sigma}\phi v_j n_j ds \qquad (5\cdot5b)$$

上式利用(5·3b)可得

$$\int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\operatorname{div}(\phi\mathbf{v})\right]dV \qquad (5\cdot5c)$$

但实际上由于间断面对连续介质域有相对速度$(\mathbf{c}-\mathbf{v})$，则不同瞬时间断面σ是由不同质点集组成，即有质点穿过间断面σ。这构成了物质导数的新的组成部分，它很容易按下述方法求得。dt时间内V^+区域因间断面相对于质点运动而减少的体积为$(\mathbf{c}-\mathbf{v}^+)\cdot\mathbf{n}_\sigma dsdt$，由此减少的$\phi$的体积分为$\int_\sigma(\mathbf{c}-\mathbf{v}^+)\cdot\mathbf{n}_\sigma\phi^+dsdt$。$dt$时间内，$V^-$区域因间断面相对于质点运动而增加的体积为$(\mathbf{c}-\mathbf{v}^-)\cdot\mathbf{n}_\sigma dsdt$，而由此增加的$\phi$的体积分为$\int_\sigma(\mathbf{c}-\mathbf{v}^-)\cdot\mathbf{n}_\sigma\phi^-dsdt$。因此，由于不连续面$\sigma$相对于物体的运动而对物质导数的贡献为

$$\int_\sigma(\mathbf{c}-\mathbf{v}^-)\cdot\mathbf{n}_\sigma\phi^-ds-\int_\sigma(\mathbf{c}-\mathbf{v}^+)\cdot\mathbf{n}_\sigma\phi^+ds=\int_\sigma[\![\phi(\mathbf{v}-\mathbf{c})]\!]\cdot\mathbf{n}_\sigma ds \qquad (5\cdot5d)$$

这里$[\![\quad]\!]$表间断值，$[\![f]\!]=f^+-f^-$，f为标量、矢量或张量分量。将式(5·5c)与(5·5d)的右端相加起来，最后得到物理量ϕ和质点速度$\mathbf{v}$在通过间断面σ有跳变情况下的体积分的物质导数为[6]：

$$\frac{D}{Dt}\int_{V-\sigma}\phi dV=\int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\operatorname{div}(\phi\mathbf{v})\right]dV+\int_\sigma[\![\phi(\mathbf{v}-\mathbf{c})]\!]\cdot\mathbf{n}_\sigma ds$$

$$=\int_{V-\sigma}\left[\frac{D\phi}{Dt}+\phi\operatorname{div}\mathbf{v}\right]dV+\int_\sigma[\![\phi(\mathbf{v}-\mathbf{c})]\!]\cdot\mathbf{n}_\sigma ds \qquad (5\cdot6)$$

最后提一下在域V中有间断面时的Green-Gauss定理。设参量ϕ定义于体积V和表面S上（简计为$V+S$上，（图3.3），在越过σ时有跳变，其在σ两侧之值分别为ϕ^+和ϕ^-。对该域应用Gauss定理得

$$\int_{S-\sigma}\phi n_k ds+\int_\sigma \phi^- n_k ds-\int_\sigma \phi^+ n_k ds$$

$$=\int_{V-\sigma}\phi_{,k}dV. \qquad (5\cdot7a)$$

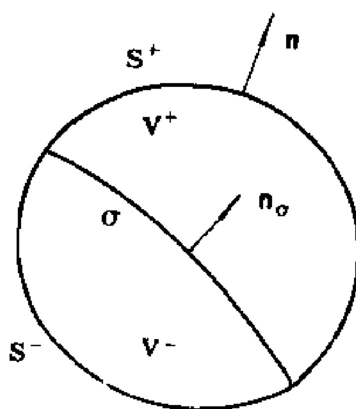


图3.3 有间断面的域

上式左边第二和第三项面积分中的n_k为σ的单位法线矢量$\mathbf{n}_\sigma$的分量，且规定n_σ指向V^+的内部。今后在易于看清处将省去$\mathbf{n}_\sigma$的下标。由此得

$$\int_{s-\sigma}\phi n_k ds=\int_{V-\sigma}\phi_{,k}dV+\int_\sigma [\![\phi]\!] n_k ds \qquad (5\cdot7b)$$

式中

$$[\![\phi]\!]=\phi^+-\phi^- \qquad (5\cdot7c)$$

若$\phi=\sigma_{ij}$，

则

$$\int_{s-\sigma}\sigma_{ij}n_j ds=\int_{V-\sigma}\sigma_{ij,j}dV+\int_\sigma [\![\sigma_{ij}]\!] n_j ds \qquad (5\cdot7d)$$

习　　题

3·1　设速度场为$v_1=x_1/(1+t)$，$v_2=2x_2/(1+t)$，$v_3=3x_3/(1+t)$，式中x_i为空间坐标，（1）试求Euler描述的加速度分量；（2）试确定位移场$x_i=x_i(\mathbf{X},t)$；（3）试确定Lagrange描述的加速度分量。

3·2　试确定题3·1速度场的流线和迹线，并指出，在此情况下它们刚好重合。

提示：迹线指流体质点运动的轨迹。质点$\mathbf{X}_P$的迹线参数方程为$x_i=x_i(\mathbf{X}_P,t)$。迹线的微分方程为$dx_i=v_i(\mathbf{X}_P,t)dt$。流线是指在某一固定瞬时$t_1$，线上任一点的切线方向均与该点在该瞬时的速度矢量方向一致的曲线。流线的微分方程为$dx_1/v_1=dx_2/v_2=dx_3/v_3$，在积分流线微分方程时认为$t$是常数。对非稳定速度场，流线族的形状、位置要随时间发生改变，对定常流动，流线与迹线重合。

3·3　连续介质的运动由$x_1=A+(e^{-B\lambda}/\lambda)\sin\lambda(A+\omega t)$，$x_2=-B-(e^{-B\lambda}/\lambda)\cos\lambda(A+\omega t)$，$x_3=X_3$给出。试指出质点的运动路线为圆，且速度值为常数，并确定质点物质坐标X_1，X_2与A、B之关系。

3·4　试指出加速度$\mathbf{a}$可写成下列矢量形式：

$$\mathbf{a}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}+\frac{1}{2}\nabla v^2$$

式中∇为Hamilton算子：$\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i$，$\mathbf{e}_i$为笛卡尔坐标轴方向单位矢量。

3·5　对稳定速度场$\mathbf{v}=3x_1^2x_2\mathbf{e}_1+2x_2^2x_3\mathbf{e}_2+x_1x_2x_3^2\mathbf{e}_3$，试确定空间点$P(1,1,1)$在$\mathbf{n}$

$=\frac{1}{5}(3\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_3)$方向之伸长率及正交方向$\mathbf{n}$和$\mathbf{m}=\frac{1}{5}(4\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_3)$之间的剪切率。

提示：剪切率$\gamma_{mn}=2\mathbf{n}^T\mathbf{V}\mathbf{m}$，伸长率$\frac{D}{Dt}(ds)/ds=\mathbf{n}^T\mathbf{V}\mathbf{n}$。参见式(2·21)和(2·22)。

3·6　试证　$\frac{DJ}{Dt}=J\operatorname{div}\mathbf{v}$

3·7　试证　$\frac{D}{Dt}(\ln J)=\operatorname{div}\mathbf{v}$

3·8　试证　$\frac{D}{Dt}(ds_i)=-\frac{\partial v_k}{\partial x_i}ds_k+\frac{\partial v_k}{\partial x_k}ds_i$。式中$ds_i$为变形后之面元$d\mathbf{s}$之分量。

3·9　试证　$\frac{D}{Dt}(dV)=dV\operatorname{div}\mathbf{v}$。式中$dV$为体积增量。

3·10　试证　$\frac{D}{Dt}\int_V 2\omega_i dV=\int_S(e_{ijk}a_k+2\omega_j v_i)ds_j$。式中$\omega_i$为角速度矢量，$a_k$为加速度矢量。

3·11* 试证　$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\omega_i dV=\int_S\left[\frac{1}{2}e_{ijk}a_k+\omega_j v_i-\omega_i v_j\right]ds_j$。

3·12* 试证　$\frac{D}{Dt}\int_S p_i ds_i=\int_S\left[\dot{p}_i+p_i v_{k,k}-p_k v_{i,k}\right]ds_i$，式中$p_i$为任一矢量，$\dot{p}_i=\frac{Dp_i}{Dt}$。

提示：利用面积分物质导数的公式

$$\frac{D}{Dt}\int_S Q(\mathbf{x},t)dS_i=\int_S\left[\frac{DQ}{Dt}+Qv_{k,k}\right]ds_i-\int_S Qv_{k,i}ds_k$$

式中，$Q(\mathbf{x},t)$为标量、矢量和张量的分量，dS_i为变形后（瞬时构形中）面元$d\mathbf{S}$的分量。

3·13 设某点形变率之值为$V_{11}=V_{22}=V_{33}=a$，$V_{12}=V_{23}=V_{31}=b$，式中a和b为常数，试求该点单位伸长率$\frac{D}{Dt}(ds)/ds$之值等于a的方向$\mathbf{n}$所必须满足的条件。

3·14　若连续介质的瞬时速度场为标量场$\varphi(\mathbf{x})$的梯度，试指出在每一点至少存在三个互相正交的物质方向瞬时处于不动。

3·15　设标量λ、正交单位矢量$\boldsymbol{\mu}$与$\boldsymbol{\nu}$和坐标x_i无关。连续介质作简单剪切运动：垂直于$\boldsymbol{\nu}$的物质平面沿$\boldsymbol{\mu}$方向作平动，其速度与原点至该面之垂直距离成正比。试决定此运动的形变率V_{ij}、主伸长率，及形变率主轴相对于$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\nu}$的取向。

3·16　试证明当且仅当形变率分量V_{ij}与坐标无关，且基本不变量$J_{(1)}$和$J_{(2)}$为0时，变形场为简单剪切。

提示：参看题3·15关于简单剪切的定义及其主伸长率之值。

3·17　试推导圆柱坐标系(ρ,θ,z)中形变率分量的表示式。设圆柱坐标系中之速度分量为$v_\rho=v_\rho(\rho,\theta,z)$，$v_\theta=v_\theta(\rho,\theta,z)$，$v_z=v_z(\rho,\theta,z)$。

提示：可采用坐标变换法。

第四章　连续介质的基本定律

某些连续介质普遍适用的物理定律，常以守恒定律的形式出现，它们可表述为：任一连续介质集合内，某物理量的增加率等于其供给率。这些供给率通常是由表面通量和体积内分布的源提供的。我们首先以这一集合的整体为对象来研究，因而这些定律是以积分形式出现的，其中包含物理量的体积分和面积分。虽然，这些体积分和面积分的区域不断地改变其大小、形状和位置，但它们仍属于同一物质集合。因此，当求这些积分对时间的变化率时应采用物质导数。若对所得的积分形式的守恒定律采用局部化假设，即认为这些定律对任意小的部分也成立、就可以得到微分形式或局部形式的守恒定律。

这些定律是从各种物质的宏观现象中抽象出来的共同规律，它们不受连续介质物质结构的影响。因而任何连续介质，只要速度不接近光速，都应遵守这些定律。

本章中我们将提到质量、动量、动量矩和能量四个守恒定律。在讨论能量守恒定律时介绍了传统热力学的基本概念、第一定律及其在连续介质中应用的形式和间断面的跳跃条件。至于熵不等式将分别放在第五章和第八章中讨论。

§4·1　质量守恒定律、连续方程

最简单的守恒定律是质量守恒定律。设连续体在瞬时构形（瞬时 t ）占有体积V和表面积S，并设体内不存在产生质量的源。由于该连续体表面S是由同样的质点集组成，并随这些质点集运动，因此没有质量通过表面S流入连续体。这样，连续体质量的增加率为零，运动过程中连续体的总质量保持不变，此即质量守恒定律。

以ρ和ρ_0分别表示连续体在瞬时构形和参考构形中的密度，采用空间描述时，密度ρ是质点瞬时坐标x_i和时间 t 的函数。根据质量守恒定律有

$$\int_V \rho\, dV = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 \qquad (1\cdot1)$$

这里V_0是参考构形中的连续体的体积。利用式（2:5·2），式（1·1）可写为$\int_{V_0}(\rho J-\rho_0)dV_0 = 0$。根据局部化假设，该式对体积内任意小的物质部分也成立，由此得

$$\rho J = \rho_0 \qquad (1\cdot2)$$

按照质量守恒定律也应有

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho dV = 0 \qquad (1\cdot3)$$

利用（3:5·3b）式上式写为

$$\int_V\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)\right]dV = \int_V\left[\frac{D\rho}{Dt}+\rho\,\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right]dV = 0 \qquad (1\cdot4)$$

上式对连续体中的任意小物质部分也成立，由此得被积函数应恒等于零

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)=0 \tag{1·5}$$

即
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})=0$$

或
$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=0 \tag{1·6}$$

即
$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\,\mathrm{div}\mathbf{v}=0$$

微分方程（1·5）或（1·6）式也称为连续性方程。

若连续体内速度场 $\mathbf{v}$ 对空间坐标的偏导数具有间断，则（1·4）式的形式必须作改变，利用（3:5·3a）式，则（1·3）式可写成对这类速度场适用的积分形式的连续方程

$$\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_S\rho v_j n_j ds=0 \tag{1·7}$$

式中n_j为连续体表面外法线方向余弦。

设连续体中存在某个以速度 $\mathbf{C}$ 运动的物理不连续曲面σ，在该面上密度ρ和质点速度 $\mathbf{v}$ 产生有限值跳跃。则连续方程（1·5）（1·6）式在σ上不成立。利用上一章有间断面情况下体积分的物质导数计算式可得到量ρ，$\mathbf{v}$ 在穿过σ时满足质量守恒的跳跃条件。令(3:5·6)式中的$\phi=\rho$，可得：

$$\frac{D}{Dt}\int_{V-\sigma}\rho dV=\int_{V-\sigma}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})\right)dV+\int_\sigma【\rho(\mathbf{v}-\mathbf{c})】\cdot\mathbf{n}ds=0 \tag{1·8}$$

此式对连续体及间断面σ的任意小部分都成立，则各被积函数应恒等于零。由此得：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})=0\qquad\text{在}(V-\sigma)\text{内} \tag{1·9a}$$

$$【\rho(\mathbf{v}-\mathbf{c})】\cdot\mathbf{n}_\sigma=0\qquad\text{在}\sigma\text{上} \tag{1·9b}$$

式（1·9b）即为在σ上满足质量守恒定律的跳跃条件。

利用连续性方程可简化体积分$\int_V\rho\phi dV$ 的物质导数的计算，这里ϕ为标量或张量的分量，ρ为密度。考虑$\rho\phi$和 $\mathbf{v}$ 在不连续面σ处有跳跃的一般情况，根据（3:5·6）式，并以$\rho\phi$代替其中的ϕ可得

$$\frac{D}{Dt}\int_{V-\sigma}\rho\phi dV=\int_{V-\sigma}\left(\frac{D}{Dt}(\rho\phi)+\rho\phi\,\mathrm{div}\mathbf{v}\right)dV+\int_\sigma【\rho\phi(\mathbf{v}-\mathbf{c})】\cdot\mathbf{n}ds$$

利用（1·6）式，上式第一个体积分的被积函数可简化为：

$$\frac{D}{Dt}(\rho\phi)+\rho\phi\,\mathrm{div}\mathbf{v}=\rho\frac{D\phi}{Dt}+\phi\left(\frac{D\rho}{Dt}+\rho\,\mathrm{div}\mathbf{v}\right)=\rho\frac{D\phi}{Dt}$$

由此得

$$\frac{D}{Dt}\int_{V-\sigma}\rho\phi dV=\int_{V-\sigma}\rho\frac{D\phi}{Dt}dV+\int_{\sigma}[\rho\phi(\mathbf{v}-\mathbf{c})]\cdot\mathbf{n}ds \qquad (1\cdot10)$$

当不存在物理不连续曲面σ时，上式简写为

$$\frac{D}{Dt}\int_{V}\rho\phi dV=\int_{V}\rho\frac{D\phi}{Dt}dV \qquad (1\cdot11)$$

将（1·11）式同（3:5·3b）、(3:5·3c)式比较可见，计算$\rho\phi$的体积分的物质导数比计算ϕ的体积分物质导数要简单。因此，常把物理量的密度写成单位质量所含有的量的形式，而不写成单位体积所含有的量的形式。对前者，求物理量的物质导数化为求体积分$\int_V\rho\phi dV$的物质导数；对后者，则化为求体积分$\int_V\phi dV$的物质导数。

§4·2　动量守恒定律、应力张量

Ⅰ．动量守恒方程

牛顿运动定律是对质点和离散质点系而言的。Euler 将其推广于连续介质，认为下列定律是对一切连续介质共同成立的一般原理

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{P}=\mathbf{F} \qquad (2\cdot1)$$

$$\frac{D\mathbf{H}}{Dt}=\mathbf{L} \qquad (2\cdot2)$$

它们被称为 Euler 运动第一和第二定律，其中$\mathbf{P}$为瞬时构形中占有体积V的任意连续体所具有的线动量

$$\mathbf{P}=\int_V\rho\mathbf{v}dV \qquad (2\cdot3)$$

$\mathbf{H}$为该连续体V对惯性坐标系原点的动量矩。

$$\mathbf{H}=\int_V(\mathbf{x}\times\mathbf{v})\rho dV \qquad (2\cdot4)$$

$\mathbf{F}$为作用于连续体V上的外力，包括连续体中与V邻接部分对V的作用。$\mathbf{L}$为这些外力对惯性系坐标原点之矩。

式（2·1）阐述了连续体的动量守恒原理，即连续体任一物质部分的动量变化率等于作用在该物质部分上所有力的主向量。

作用于连续体任意部分上的力可分为体力和面力，在连续体内作用着的沿体积分布的外力称为体力。设想在连续体内任取一体积元ΔV，并设作用于此体元上的体力的合力为$\Delta\mathbf{F}$，则单位质量的体力$\mathbf{f}$为下列比值的极限

$$\mathbf{f}=\lim_{\Delta V\to0}\frac{\Delta\mathbf{F}}{\rho\Delta V}=\frac{1}{\rho}\frac{d\mathbf{F}}{dV} \qquad (2\cdot5a)$$

式中ρ为密度。这里我们假定比值的极限存在。

设想一位于连续体内的封闭面 s，外法线矢量 n，其方向由 s 的内部指向外部并垂直于 Δs。由此外法线 n 我们可以区分面元 ds 的正侧和负侧，正侧对应于 n 的正向，负侧则反之。

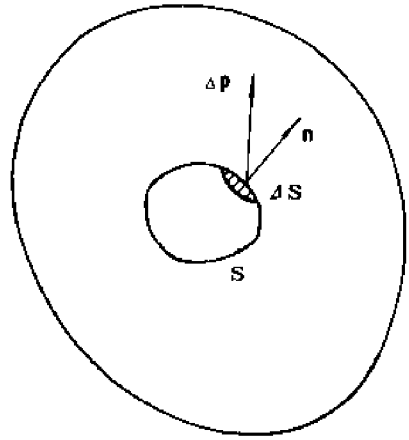


图4·1　内边界上之面力

设处于 Δs 正侧一边的物质部分对处于 Δs 负侧一边的物质部分的接触作用力为 $\Delta \mathbf{P}$（图4·1）则定义应力矢量 $\mathbf{T}$ 为下列比值的极限

$$\mathbf{T} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{P}}{ds} \qquad (2 \cdot 5b)$$

这里我们假定比值的极限存在。当 s 为连续体的外表面时，$\mathbf{T}$ 即为外界作用于连续体的面力（接触力）。

我们假设体力 f 是外部的，与连续体是否存在于某处无关，而只是质点瞬时坐标 x 与时间 t 的函数

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \qquad (2 \cdot 5c)$$

而面力（接触力）$\mathbf{T}$ 不仅决定于所处的界面位置 x 和时间 t，还必须指出其作用面的外法线方向 n。对外界面上某点，我们假定只要界面在该处的法线 n 相同，则该处的接触力不论界面曲率怎样，都是相同的，则

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \qquad (2 \cdot 6)$$

于是动量守恒定律式（2·1）可写成（省写了自变量 t）：

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x})\rho dV + \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) ds \qquad (2 \cdot 7a)$$

或

$$\int_V \rho \mathbf{a} dV = \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x})\rho dV + \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) ds \qquad (2 \cdot 7b)$$

Ⅱ. Cauchy 应力基本定理

现设用一物质面 σ 将区域 V 分割为两部分 V_1 和 V_2，在运动中 σ 始终由同一质点集合构成。区域 V_1 的界面为 S_1 和 σ，而 V_2 的界面为 S_2 和 σ（图4·2）

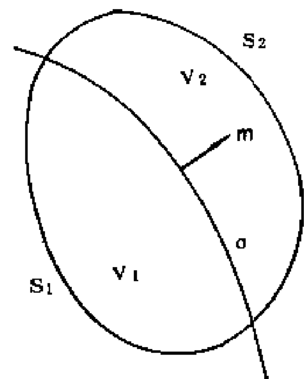


图4·2　物质域分割为两部分

由于式（2·7）对连续体的任一部分成立，因此它也必然分别对 V_1 和 V_2 部分成立。设 m 表示 σ 的指向 V_2 内的单位法线矢量，则

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_1} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_1} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV + \int_{S_1} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) ds + \int_\sigma \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) ds \qquad (2 \cdot 8)$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_2} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_2} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV + \int_{S_2} \mathbf{T}(\mathbf{x}, m) ds + \int_\sigma \mathbf{T}(\mathbf{x}, -\mathbf{m}) ds \qquad (2 \cdot 9)$$

注意到 $S = S_1 + S_2$，$V = V_1 + V_2$，将式（2·8）和（2·9）相加，再减去（2·7a）式，即得

$$\int_{\sigma}[\mathbf{T}(\mathbf{x},\ \mathbf{m})+\mathbf{T}(\mathbf{x},\ -\mathbf{m})]ds=0 \tag{2·10}$$

由于上式对界面σ上任意小部分成立。由此得 Cauchy 应力原理

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},\ -\mathbf{m})=-\mathbf{T}(\mathbf{x},\ \mathbf{m}) \tag{2·11}$$

上式表明，当外法线方向反向时，应力矢量也反向。当σ为运动着的物理不连续面，(2·11)式仍然成立。

在瞬时构形中考虑一微小四面体（图4·3），其三个面为外法线指向坐标轴负向的坐标面，坐标面上的面力矢量分别以$\overset{1}{\mathbf{T}}(-\mathbf{e}_1)$、$\overset{2}{\mathbf{T}}(-\mathbf{e}_2)$、$\overset{3}{\mathbf{T}}(-\mathbf{e}_3)$表之；第四面$ABC$的外法线方向单位矢量为$\mathbf{n}$，其上的面力矢量为$\mathbf{T}$。设顶点$O$至$ABC$面之垂直距离为$h$，则四面体体积为$\frac{1}{3}hds$，这里$ds$为$ABC$之面积，而各坐标面之面积分别为$n_1ds$、$n_2ds$和$n_3ds$。

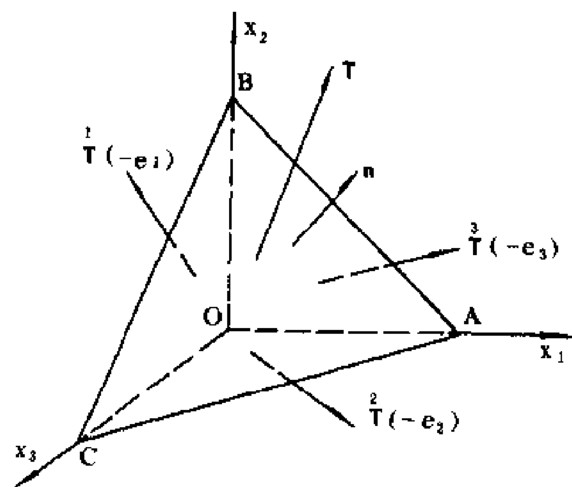


图4·3 四面体上的应力

为了将（2·7）式应用于此四面体，可先求体积分与面积分之表达式。令$h\to 0$（从而$ps\to 0$）而保持$\mathbf{n}$不变，则有

$$\left|\iint_V \rho\mathbf{a}\,dV\right|\leqslant\frac{1}{3}h\,ds\,a \tag{2·12a}$$

$$\left|\iint_V \rho\mathbf{f}dV\right|\leqslant\frac{1}{3}hds\,b \tag{2·12b}$$

这里a和b是四面体$\rho\mathbf{a}$和$\rho\mathbf{f}$之最大绝对值。而面积分为

$$\int_S \mathbf{T}ds=\mathbf{T}(\mathbf{x},\ \mathbf{n})ds+\overset{1}{\mathbf{T}}(\mathbf{x},-\mathbf{e}_1)n_1ds$$

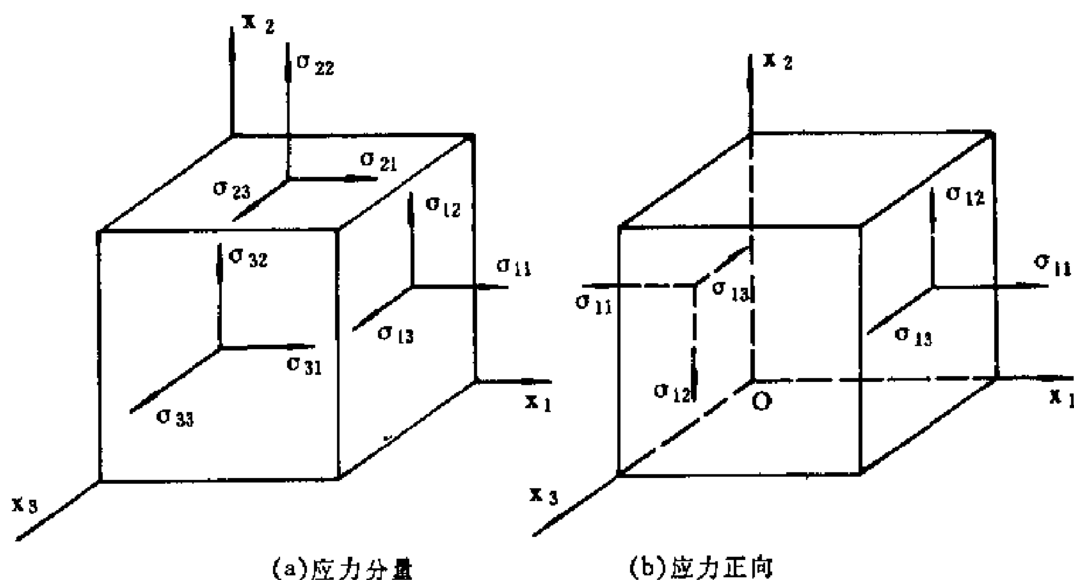
$$+\overset{2}{\mathbf{T}}(\mathbf{x},\ -\mathbf{e}_2)n_2ds+\overset{3}{\mathbf{T}}(\mathbf{x},\ -\mathbf{e}_3)n_3ds \tag{2·12c}$$

式中$\mathbf{e}_i$为笛卡尔坐标轴正向的单位矢量。当$h\to 0$时，由(2·12a, b)式可以看出(注意到a、b为有限值)，(2·7a, b)式中之体积分较之面积分为高一阶的小量而可略去。注意到(2·11)式，由(2·7a,b)式最后得到

$$\mathbf{T}(\mathbf{n})=\sum_{i=1}^{3}\overset{i}{\mathbf{T}}(\mathbf{e}_i)n_i \tag{2·12d}$$

将$\overset{i}{\mathbf{T}}(\mathbf{e}_i)$（简写为$\overset{i}{\mathbf{T}}$）沿坐标轴方向分解，得

$$\overset{i}{\mathbf{T}}=\sigma_{ij}\mathbf{e}_j \tag{2·13}$$



(a)应力分量　　　　(b)应力正向

图4·4　应力分量

这里，σ_{ij} 为 Euler 应力张量（二阶张量）的分量，它表示瞬时构形中外法线为 x_i 方向的坐标面面元上沿坐标轴 x_j 方向的应力分量。用三对坐标面从连续体瞬时构形中切割出的矩形单元体各个面上的应力分量示于(图4·4*a*)中，图中画出各应力分量的正向。根据式(2·11)，外法线为坐标轴负向的坐标面面元上的应力分量的正向也应是沿坐标轴负向的（图4·4*b*）。

同样，将ABC面元之$\mathbf{T}(\mathbf{n})$沿坐标轴方向分解得

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = T_j \mathbf{e}_i \qquad (2\cdot14)$$

将式（2·13）和（2·14）代入（2·12*d*）得

$$T_j = \sigma_{ij} n_i \qquad (2\cdot15)$$

此即为 Cauchy 应力基本定理。注意，不论连续体是否处于平衡，Cauchy 应力原理(2·11)式及 Cauchy 应力基本定理（2·15）式均成立。

将式（2·7)写成分量形式得

$$\int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_V \rho f_i dV + \int_S T_i ds \qquad (2\cdot16)$$

利用式（2·15)及 Gauss 定理，可将式中的面积分改写为体积分，得

$$\int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_V \rho f_i dV + \int_V \sigma_{ji,j} dV \qquad (2\cdot17)$$

它对连续体内任意小的物质部分也应成立，由此即得

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \sigma_{ji,j} + \rho f_i \qquad (2\cdot18)$$

上式称为局部形式的动量守恒定律，亦即著名的 Euler 方程。而式（2·7）或（2·16)则为积分形式的动量守恒定律。

在平衡状态下，$\frac{Dv_i}{Dt} = 0$ 由上式即得平衡方程

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i = 0 \qquad (2\cdot19)$$

当连续体内的速度场 v 、密度场 ρ 和应力场 σ_{ij} 连续，但它们对坐标的偏导数不连续时，（2·17）式已不适用，这时利用（3;5·3a）可得

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho v_i dV = \int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_S \rho v_i v_j n_j ds \qquad (2\cdot 20a)$$

将上式代入（2·16）式，并注意到（2·15）式可得

$$\int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV = \int_V \rho f_i dV + \int_S (\sigma_{ji} - \rho v_i v_j) n_j ds \qquad (2\cdot 20b)$$

写成矢量形式为

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) ds = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{T} ds \qquad (2\cdot 20c)$$

Ⅲ．物理间断面处的跳跃条件

设连续体内存在以速度 c 运动着的物理不连续曲面 σ，当通过 σ 时密度 ρ 、质点速度 v 和应力 σ_{ij} 发生有限跳跃，此时运动方程（2·18）在 σ 上不成立，动量守恒定律应改写成：

$$\frac{D}{Dt}\int_{V-\sigma} \rho v_i dV = \int_{S-\sigma} \sigma_{ji} n_j ds + \int_{V-\sigma} \rho f_i dV \qquad (2\cdot 21)$$

利用（3;5·6）和（3;5·7d）于上式左边和右边第一个积分得

$$\int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + (\rho v_i v_j)_{,j}\right] dV + \int_\sigma 【 \rho v_i (v_j - c_j) 】 n_j ds$$

$$= \int_{V-\sigma} \sigma_{ji,j} dV + \int_\sigma 【 \sigma_{ji} 】 n_j ds + \int_{V-\sigma} \rho f_i dV$$

或

$$\int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + (\rho v_i v_j)_{,j} - \sigma_{ji,j} - \rho f_i\right] dV$$

$$+ \int_\sigma 【 \rho v_i (v_j - c_j) - \sigma_{ji} 】 n_j ds = 0 \qquad (2\cdot 22)$$

此式对连续体及不连续曲面 σ 的任意小部分必须成立，则各被积函数应恒等于零。由此得

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \sigma_{ji,j} + \rho f_i \quad 在 V-\sigma 内 \qquad (2\cdot 23a)$$

$$【 \rho v_i (v_j - c_j) - \sigma_{ji} 】 n_j = 0 \qquad 在\sigma上 \qquad (2\cdot 23b)$$

（2·23b）即为在 σ 上满足动量守恒的跳跃条件。

§4·3 动量矩守恒定律

Ⅰ．动量矩守恒方程

Euler 运动第二定律（2·2）式阐明了连续介质的动量矩守恒定律，即连续体任一物质部分对惯性坐标系原点之动量矩变化率等于外力对坐标原点之主矩。此物质部分之动量矩如

（2·4）式所示。外力对坐标原点之矩包括作用于该物质部分上之体力f及该物质部分界面上之面力（接触力）T 对坐标原点之矩，即

$$\int_V \rho(\mathbf{x}\times\mathbf{f})dV + \int_S (\mathbf{x}\times\mathbf{T})ds$$

此外，还可能存在体矩 b（x）和面矩 m（x，m）。这里 b（x）为作用于连续体单位质量上的外力偶矢量，而 m（x，m）为作用于外法线为 n 的面元 dS 上的单位面积的力偶矢量（接触作用）*。由此总外力矩为

$$\mathbf{L} = \int_V \rho(\mathbf{x}\times\mathbf{f})dV + \int_S (\mathbf{x}\times\mathbf{T})\, ds + \int_V \rho\mathbf{b}dV + \int_S \mathbf{m}ds \qquad (3\cdot1)$$

动量矩守恒定律写为

$$\frac{D}{Dt}\int_V (\mathbf{x}\times\mathbf{v})\rho dV = \int_V \rho(\mathbf{x}\times\mathbf{f})dV + \int_S (\mathbf{x}\times\mathbf{T})dS + \int_V \rho\mathbf{b}dV + \int_S \mathbf{m}ds \qquad (3\cdot2)$$

注意到式（1·11）上式左边可改写为：

$$\frac{D}{Dt}\int_V (\mathbf{x}\times\mathbf{v})\rho dV = \int_V \left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\times\mathbf{v} + \mathbf{x}\times\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right)\rho dV = \int_V \left(\mathbf{x}\times\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right)\rho dV \qquad (3\cdot3)$$

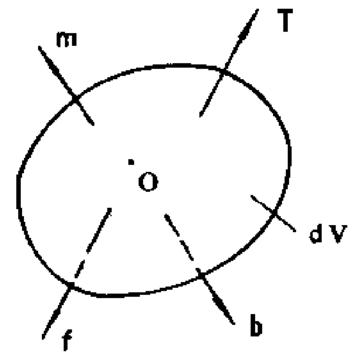


图4·5　微元体的力矩平衡

将动量矩守恒定律应用于连续体内任一微小的单元体（图 4·5），并选择单元体内任一点O作为坐标原点，则当令微元体的线度尺寸dL和体积dV趋于零时，可看出（3·2）式中所有各积分均比最后一个面积分高 1～2 阶的小量，忽略这些更高阶的小量，得

$$\int_V \mathbf{m}ds = 0 \qquad (dL\to 0,\ dV\to 0) \qquad (3\cdot4a)$$

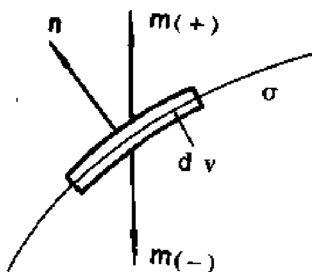


图4·6　内边界上薄层单元体的平衡

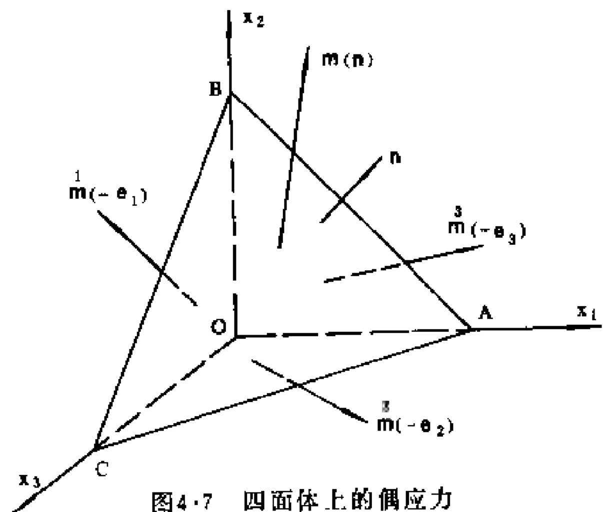


图4·7　四面体上的偶应力

*1960年以来，偶应力弹性理论有较大发展，有兴趣的读者可看[13]，[14]。

将(3·4a)式应用于连续体内任一内边界σ上的薄层微单元体dV(图4·6),即可得类似于(2·11)的式子

$$\mathbf{m}(-)=-\mathbf{m}(+) \tag{3·4b}$$

上式表明，界面正侧与负侧的面矩矢量等值反号。当σ为运动着的物量不连续面时,(3·4a、b)式仍然成立。

将(3·4a)式应用于(图4·7)所示的微四面体，得

$$\mathbf{m}(\mathbf{x},\ \mathbf{n})ds+\overset{1}{\mathbf{m}}(\mathbf{x},-\mathbf{e}_1)n_1dS+\overset{2}{\mathbf{m}}(\mathbf{x},-\mathbf{e}_2)n_2dS+\overset{3}{\mathbf{m}}(\mathbf{x},-\mathbf{e}_3)n_3ds=0$$

式中$\mathbf{m}(\mathbf{n})$为四面体上外法线为$\mathbf{n}$的倾斜面上之面矩矢量,$\overset{i}{\mathbf{m}}(\mathbf{x},-\mathbf{e}_i)$为外法线指向坐标轴负向的各坐标面上之面矩矢量，$\mathbf{e}_i$为坐标轴正向单位矢。利用(3·4$b$)，即可由上式得到类似于(2·12)式的式子

$$\mathbf{m}(\mathbf{n})=\sum_{i=1}^{3}\overset{i}{\mathbf{m}}(\mathbf{e}_i)n_i \tag{3·5}$$

将$\mathbf{m}(\mathbf{n})$(简写为$\mathbf{m}$)和$\overset{i}{\mathbf{m}}(\mathbf{e}_i)$(简写为$\overset{i}{\mathbf{m}}$)沿坐标轴分解，得

$$\mathbf{m}=M_j\mathbf{e}_j \tag{3·6a}$$

$$\overset{i}{\mathbf{m}}=m_{ij}\mathbf{e}_j \tag{3·6b}$$

式中$\overset{i}{\mathbf{m}}$为外法线沿坐标轴正向$\mathbf{e}_i$的坐标面上之面矩矢量,m_{ij}则称为偶应力分量。将(3·6a, b)两式代入(3·5)式，即得类似于Cauchy应力基本定理的关系式:

$$M_j=m_{ij}n_i \tag{3·7}$$

将(3·2)式写成分量形式，得

$$\frac{DH_i}{Dt}=L_i \tag{3·8}$$

其中
$$\begin{aligned}\frac{DH_i}{Dt}&=\frac{D}{Dt}\int_V\rho e_{ijk}x_jv_kdV=\int_V\rho e_{ijk}\frac{D}{Dt}(x_jv_k)dV\\&=\int_V\rho\left(e_{ijk}v_jv_k+e_{ijk}x_j\frac{Dv_k}{Dt}\right)dV\\&=\int_V\rho e_{ijk}x_j\frac{Dv_k}{Dt}\end{aligned} \tag{3·9a}$$

上式中$e_{ijk}v_jv_k$为零是因为($v_j\cdot v_k$)对指标j、k对称，而e_{ijk}对指标j、k为反对称。而

$$L_i=\int_Ve_{ijk}x_jf_k\rho dV+\int_Se_{ijk}x_jT_kds+\int_V\rho b_idV+\int_SM_ids \tag{3·9b}$$

此式右边的面积分可变换为体积分

$$\begin{aligned}\int_Se_{ijk}x_jT_kds&=\int_Se_{ijk}x_j\sigma_{lk}n_lds=\int_V(e_{ijk}x_j\sigma_{lk})_{,l}dV\\&=\int_V(e_{ijk}\sigma_{jk}+e_{ijk}x_j\sigma_{lk,l})dV\end{aligned}$$

$$\int_S M_i ds = \int_S m_{ji} n_j ds = \int_V m_{ji,j} dV \tag{3·9c}$$

将上面各式代入（3·8）得

$$\int_V e_{ijk}\left(\sigma_{lk,l} + \rho f_k - \rho \frac{Dv_k}{Dt}\right) x_j dV$$

$$+ \int_V (e_{ijk}\sigma_{jk} + m_{ji,j} + \rho b_i) dV = 0 \tag{3·9d}$$

根据运动方程（2·18），上式的第一个积分为零。由此得

$$\int_V (e_{ijk}\sigma_{jk} + m_{ji,j} - \rho b_i) dV = 0 \tag{3·10}$$

此式对连续体任意小物质部分成立。由此得被积函数应恒等于零

$$e_{ijk}\sigma_{jk} + \rho b_i + m_{ji,j} = 0 \tag{3·11}$$

Ⅱ. Cauchy 应力张量对称性条件和不变量

绝大多数物质为非极性物质，可不考虑体矩和面矩，则由上式得

$$e_{ijk}\sigma_{jk} = 0$$

或
$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj} \tag{3·12}$$

即在此种情况下，应力张量是对称的。故存在三个正交的应力主向，当取三个主向为坐标方向时，平行于各坐标面的面元上无切向应力而只有法向应力，称此法向应力为主应力。三个主应力分别以 σ_1、σ_2、σ_3 表之，它们由解下列三次方程求得

$$\sigma^3 - \Sigma_{(1)}\sigma^2 - \Sigma_{(2)}\sigma - \Sigma_{(3)} = 0 \tag{3·13}$$

式中 $\Sigma_{(i)}$ 为应力张量 σ_{ij} 的三个不变量

$$\Sigma_{(1)} = \sigma_{kk}$$

$$\Sigma_{(2)} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) \tag{3·14}$$

$$\Sigma_{(3)} = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{pqr} \sigma_{ip}\sigma_{jq}\sigma_{kr}$$

在建立本构方程时，我们常需要将应力张量分解为应力偏张量 S_{ij} 与球张量$\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$之和。应力偏张量定义为

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{3·15}$$

它是二阶对称张量，其主轴方向与应力张量 σ_{ij} 的主轴方向一致，其主值为

$$S_i = \sigma_i - \frac{1}{3}\sigma_{kk} \tag{3·16}$$

它满足三次方程

$$S^3 - T_{(1)}S^2 - T_{(2)}S - T_{(3)} = 0 \tag{3·17}$$

其中 $T_{(i)}$ 应为偏张量 S_{ij} 的三个不变量

$$T_{(1)} = S_{kk} = 0$$

$$T_{(2)}=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} \qquad (3\cdot18)$$

$$T_{(3)}=\frac{1}{3}S_{ij}S_{jk}S_{ki}$$

Ⅲ．物理间断面处的跳跃条件

设连续体内存在以速度 c 运动着的物理不连续曲面σ，在σ处ρ、$\mathbf{v}$、m_{ij}和σ_{ij}值发生有限跳跃，则（3·11）式在σ上不成立。此情形下动量矩守恒定律应写成

$$\frac{D}{Dt}\int_{V-\sigma}\rho(\mathbf{x}\times\mathbf{v})dV=\int_{S-\sigma}\mathbf{x}\times\mathbf{T}ds+\int_{V-\sigma}\rho(\mathbf{x}\times\mathbf{f})dV$$

$$+\int_{V-\sigma}\rho\mathbf{b}dV+\int_{S-\sigma}\mathbf{m}ds \qquad (3\cdot19)$$

分量形式则为：

$$\frac{D}{Dt}\int_{V-\sigma}e_{ijk}\rho x_j v_k dV=\int_{S-\sigma}e_{ijk}x_j\sigma_{lk}n_l ds+\int_{V-\sigma}e_{ijk}\rho x_j f_k dV$$

$$+\int_{V-\sigma}\rho b_i dV+\int_{S-\sigma}m_{ji}n_j ds \qquad (3\cdot20)$$

利用式（1·10）和（3·5·7b）式，上式化为

$$\int_{V-\sigma}e_{ijk}\rho\left(v_j v_k+x_j\frac{Dv_k}{Dt}\right)dV+\int_{\sigma}e_{ijk}x_j【\rho v_k(v_l-c_l)】n_l ds$$

$$=\int_{V-\sigma}e_{ijk}(\sigma_{jk}+x_j\sigma_{lk,l})dV+\int_{\sigma}e_{ijk}x_j【\sigma_{lk}】n_l ds$$

$$+\int_{V-\sigma}e_{ijk}\rho x_j f_k dV+\int_{V-\sigma}\rho b_i dV+\int_{V-\sigma}m_{ji,j}dV+\int_{\sigma}【m_{ji}】n_j ds$$

利用运动方程（2·18）并注意$e_{ijk}v_j v_k=0$，上式简化为

$$\int_{V-\sigma}[e_{ijk}\sigma_{jk}+\rho b_i+m_{ji,j}]dV$$

$$+\int_{\sigma}[【m_{ji}】n_j-e_{ijk}x_j【\rho v_k(v_l-c_l)-\sigma_{lk}】n_l]sS=0 \qquad (3\cdot21)$$

上式对连续体和σ上任一微小部分成立，由此得

$$e_{ijk}\sigma_{jk}+\rho b_i+m_{ji,j}=0 \quad 在V-\sigma内 \qquad (3\cdot22a)$$

$$e_{ijk}x_j【\rho v_k(v_l-c_l)-\sigma_{lk}】n_l=【m_{li}】n_l \quad 在\sigma上 \qquad (3\cdot22b)$$

式（3·22b）为σ上满足动量矩守恒的跳跃条件。

当不考虑面矩时，满足动量矩守恒的跳跃条件与满足动量守恒的跳跃条件是相同的。

§4·4　热力学的一些基本概念与热力学第一定律

能量守恒定律是自然界的一条普遍规律，它指出：物系能量的增加应等于输入的能量。能可以从一种形式转化为另一种形式，但在转化和传递过程中，能量的数量不变，它不会无中生有，也不会无形消失。本节我们讨论热力学过程的能量守恒，它由热力学第一定律来表述。

Ⅰ. 基本概念

如§2·1 所述，我们研究的对象是由连续介质组成的某个实域 Ω_X，它的初始构形是由其物质坐标X 而唯一确定的。连续介质的这一特定集合在热力学中被称为系统。一个与周围介质无物质交换的系统称为封闭系统。今后如无特别声明，所讨论的系统将限于封闭系统。与周围介质既无物质交换又无能量交换的系统称为孤立系统。传统热力学中常讨论孤立系统，而在连续介质力学中也研究开系统。

一个纯碎的热过程是这样一个过程，在此过程中能量流过系统的边界或由内部热源供给系统是在下述条件下进行的：无体力；部分边界固定不动，而其它边界则无表面力的作用，这类能量称之为热，并以 Q 表之。一个绝热过程是这样一个过程：在此过程中无内部热源供热而边界上又是绝热的，能量传至系统内部是靠施加表面力与体力来完成的，这类能量称之为功，并以 W 表之。绝热过程又称为纯力学过程，经受绝热过程的系统称为绝热系统。一个热力学过程则是一个既有功作用又有热传至系统上的过程。

作为一个公理，我们将假设系统（域）Ω_X 及其微系统 ω_X 拥有内能 E，它是一个具有广延性质（Extensive）的可加性量，即存在一个在 Ω_X 中分片连续的单位质量能量密度 e，使得

$$E=\int_{V_0}\rho_0 e(\mathrm{X},\ t)dV_0=\int_V \rho e(\mathrm{x},t)dV \qquad (4\cdot1)$$

这一公理使我们摆脱了传统热力学关于研究的系统是均匀有限系统，过程是静态或拟静态过程的束缚，对连续介质热力学的研究具有十分重要的意义。事实上在传统热力学中，内能的定义是从下述理想化的过程中抽象出来的，即“一个绝热系统从状态Ⅰ经任一路径至状态Ⅱ，则外界对系统所做之功都相等，由此得出存在一个表征系统状态的单值函数——内能 E”，这一理想的过程明确地要求系统内部的状态必须是均匀的（否则就不存在系统的单值内能函数），和过程必须是平衡或拟平衡的（否则就不可能达到均匀状态），这些直到今天仍在热力学中起主导作用的概念，对连续介质力学工作者是很吃惊的。这是因为那怕是初等的连续介质力学，如水力学和材料力学，用的也都是场的理论，即认为应力应变状态是决定于空间位置的，是在空间变化的，因而必须用应变和应力去代替传统热力学中诸如摩尔体积和容器压力的概念。另一方面实际过程不可能是静态的或无限慢的，正如 Truesdell 所述：既谈过程又谈平衡本身就是矛盾的。总之连续介质热力学是不可能在传统热力学的这些基本概念上发展的。我们必须从非均匀场概念的前提出发来建立我们的体系，这里最重要的当然是基本模型的选择，使之既能适合于场的分析的需要，又能有确定的物理内涵。在导论中提到的宏观无限小、微观无限大的微系统（单元）模型就是这样一个模型，一方面它通过“宏观无限小”的引入使得关于 ω_X 具有均匀的热力学状态的假设对场的数学分析造成的误差可以忽略不计，另一方面通过“微观无限大”又使得 ω_X 具有足够多的粒子，使得对该系统引入的参量是有统计平均的物理基础的。其次在建立基本理论系统时，我们必须明确那些概念和原理是不说自明的，是推导其它定律和建立概念的基础，它们的正确性是根据长期的经验确认的，是难以也不必要加以证明的，这样的原理我们称之为公理。它对于研究复杂的热力学过程具有极大的重要性，例如在这里我们摆脱了传统热力学关于内能定义方法，作为公理确认了具有广延性质的内能密度的存在，这就奠定了连续介质热力学的一个重要支柱，使得有

可能摆脱均匀、平衡等传统热力学观念的束缚，从这里我们可以看出公理化方法的极为重要的意义。

基本概念　一个热力学系统的状态变量是一个可测量的（直接的或间接的）物理实体（Physical entity）。它在 t 时刻的数值大小对于唯一地决定在 t 时刻的能量密度 e 的数值是必须的（但并不是充分的）。进而如果这个状态变量不是以前发现的状态变量的函数，它就称之为基本的（Primitive）状态变量。承认应变是可测量的，并且应变变化将改变固体的内能，人们确信应变张量是描述固体介质热力学状态的基本状态变量；承认当应变保持常数时，藉助于一个热力学过程也可以改变内能，因而反映着系统“冷度”或“热度”并可用如同热电偶那样的装置进行测定的物理量——温度，也是状态变量，它们都是独立的变量，它们的函数如应力张量和内能则称之为状态函数，而表达这些状态变量间关系的方程则称之为状态方程或本构方程。

Ⅱ．热力学第一定律

热力学第一定律可表述为：作用于系统上功的增量 δW 加上系统接受的热的增量 δQ 等于系统内能的增量 ΔE 加上动能的增量 ΔK，即

$$\Delta E+\Delta K=\delta W+\delta Q \tag{4·2}$$

符号 Δ 和 δ 分别表示与过程无关的量（状态量）和与过程有关的量（过程量）的增量。应该指出的是动能 K 和内能 E 一样都是可加性的状态函数，而在过程中作的功或加的热，则不仅与初始和终了状态有关，而且与过程本身有关，这就是为什么 Q 与 W 前采用符号 δ 之故。如果此增量无限小，且方程（4·2）中的量是时间的可微函数，则可写成率的形式

$$\dot{E}+\dot{K}=\dot{W}+\dot{Q} \tag{4·3}$$

式中“·”表示对时间的物质导数。显然，热力学第一定律表述的是能量守恒定律。

Ⅲ．热力学第一定律在连续介质中的应用

设连续体中任一质点 **X** 在瞬时 t 时的速度为 $\mathbf{v}$，则其具有的总动能为

$$K=\frac{1}{2}\int_V\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dV=\frac{1}{2}\int_V\rho v_iv_idV \tag{4·4}$$

这里积分区域是连续体瞬时构形的体积。

外力（包括体力、面力、体矩和面矩）对物体所作的机械功率为：

$$\begin{aligned}\frac{DW}{Dt}&=\int_V\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\rho dV+\int_S\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}ds+\int_V\rho\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega}dV+\int_S\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}ds\\&=\int_Vf_iv_i\rho dV+\int_ST_iv_ids+\int_V\rho b_k\omega_kdV+\int_SM_k\omega_kds\\&=\int_Vf_iv_i\rho dV+\int_S\sigma_{ji}n_jv_idS+\int_V\rho b_k\omega_kdV+\int_V(m_{jk}\omega_k)_{,j}dV\end{aligned} \tag{4·5}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ 为瞬时角速度矢量。

热量输入连续体是通过连续体表面和体内的内热源两个途径。单位时间内通过单位等温面积的热量称为热流密度，以 **h** 表之，它是矢量，其方向垂直于等温面而指向温度降低的方向。根据 Fourier 热传导定律，对各向同性介质有

$$\mathbf{h} = -\lambda \operatorname{grad} T \tag{4·6}$$

这里T为温度，λ为导热系数。由此，单位时间内经过连续体表面元ds（其外法线单位矢量为$\mathbf{n}$）流入连续体的热量为

$$-\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}ds = -h_j n_j ds$$

设体内还有分布内热源，单位质量在单位时间内供应的热量以q表之，则单位时间 物体吸收的总热量为

$$\frac{DQ}{Dt} = -\int_S \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}ds + \int_V \rho\dot{q}dV \tag{4·7}$$

将式（4·1）（4·4）（4·5）和（4·7）代入热力学第一定律（4·3)式，并利用（1·11）式得

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v_i v_i + e\right)dV = \int_V (\rho f_i v_i + \rho b_k \omega_k + \rho\dot{q})dV$$

$$+\int_S (\sigma_{ji} v_i - h_j) n_j ds + \int_V (m_{jk,j}\omega_k + m_{jk}\omega_{k,j})dV \tag{4·8}$$

将上式右边的面积分化为体积分

$$\int_S (\sigma_{ji} v_i - h_j) n_j ds = \int_V (\sigma_{ji,j} v_i + \sigma_{ji} v_{i,j} - h_{j,j})dV$$

$$= \int_V [\sigma_{ji,j} v_i + \sigma_{ji}(V_{i,j} + e_{kji}\omega_k) - h_{j,j}]dV$$

这里利用了 $v_{i,j} = V_{ij} + W_{ij} = V_{i,j} + e_{kji}\omega_k$（见3:4·1式）。将上式代入（4·8）得

$$\int_V \rho \frac{De}{Dt} dV = \int_V \left(\sigma_{ji,j} + \rho f_i - \rho\frac{Dv_i}{Dt}\right) v_i dV$$

$$+\int_V (e_{kji}\sigma_{ji} + m_{jk,j} + \rho b_k)\omega_k dV + \int_V \sigma_{ji} V_{ij} dV$$

$$+\int_V (\rho\dot{q} - h_{j,j})dV + \int_V m_{jk}\omega_{k,j} dV$$

根据由动量和动量矩守恒定律得到的（2·18）和（2·11）式，上式右边头两个体积分为零，由此得

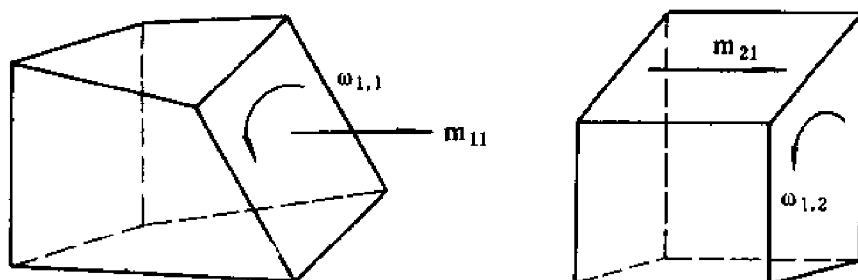
$$\int_V \rho \frac{De}{Dt} dV = \int_V (\sigma_{ji} V_{ij} + m_{ji}\omega_{i,j} + \rho\dot{q} - h_{j,j})dV \tag{4·9}$$

此即为热力学第一定律的积分形式。由于它对物体内任意小物质部分都必须成立，则等式两边的被积函数应相等，由此得到热力学第一定律的局部形式

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma_{ji} V_{ij} + m_{ji}\omega_{i,j} + \rho\dot{q} - h_{j,j} \tag{4·10}$$

这里，De/Dt为单位质量的内能变化率，$\sigma_{ji}V_{ij}$为伸长和剪切变形功率。而$m_{ji}\omega_{i,j}$为相对转动变形功率，即单元体变形前相互平行的一对面产生相对转动时这些面上之面矩所做的功率（图4·8）。上式中的下标“$,j$”指对空间坐标x_j求偏导数。

这里要强调的是式（4·9）和（4·10)都是在空间坐标架（瞬时构形）中写出的热力学第一定律的形式，它在初始构形中表述的形式将在§8·2中予以介绍。



(a) 左、右面绕x_1轴相对转动　　(b) 上、下面绕x_1轴相对转动

图4·8 偶应力完成的功率

Ⅳ. 物理间断面处的跳跃条件

设体内存在物理不连续曲面σ，当穿过σ时，ρ、e、$\mathbf{v}$、$\boldsymbol{\omega}$、σ_{ij}、m_{ij}、q_j等出现了有限跳跃，则（4·10）式在σ上不成立。此时能量守恒定律可写为

$$\frac{D}{Dt}\int_{V-\sigma}\rho\left(e+\frac{1}{2}v_iv_i\right)dV=\int_{V-\sigma}(\rho f_iv_i+\rho b_k\omega_k+\rho\dot{q})dV$$

$$+\int_{S-\sigma}(\sigma_{ji}v_i-h_j)n_jdS+\int_{S-\sigma}m_{jk}\omega_kn_jdS \quad (4·11)$$

利用式（1·10）于上式左边的体积分，式（3：5·7b）于上式右边的面积分，得

$$\int_{V-\sigma}\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v_iv_i+e\right)dV+\int_\sigma【\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_iv_i+e\right)(\mathbf{v}-\mathbf{c})】\cdot\mathbf{n}ds$$

$$=\int_{V-\sigma}(\rho f_iv_i+\rho b_k\omega_k+\rho\dot{q})dV+\int_{V-\sigma}(\sigma_{ji}v_i-h_j)_{,j}dV$$

$$+\int_\sigma【\sigma_{ji}v_i-h_j】n_jds+\int_{V-\sigma}(m_{jk}\omega_k)_{,j}dV+\int_\sigma【m_{jk}\omega_k】n_jds$$

再利用由动量与动量矩守恒所得的结果，经化简后得到下式

$$\int_{V-\sigma}\left(\rho\frac{De}{Dt}-\sigma_{ji}V_{ij}-m_{ji}\omega_{ij}+h_{j,j}-\rho\dot{q}\right)dV$$

$$+\int_\sigma【\rho\left(\frac{1}{2}v_iv_i+e\right)(v_j-c_j)-\sigma_{ji}v_i+h_j-m_{jk}\omega_k】n_jds=0 \quad (4·12)$$

此式对体内及不连续曲面σ上的任一部分均成立，则各被积函数应恒等于零。由此得

$$\rho\frac{De}{Dt}-\sigma_{ji}V_{ij}-m_{ji}\omega_{i,j}+h_{j,j}-\rho\dot{q}=0$$

（在$V-\sigma$）内　　（4·13a）

$$【\rho\left(\frac{1}{2}v_iv_i+e\right)(v_j-c_j)-\sigma_{ji}v_i-m_{jk}\omega_k+h_j】n_j=0$$

在σ上　　（4·13b）

式（4·13b）即为能量守恒定律在σ上的跳跃条件。在不存在面矩的情况下，上两式简化为

$$\rho\frac{De}{Dt}=\sigma_{ji}V_{ij}-h_{j,j}+\rho\dot{q} \quad 在(V-\sigma内) \quad (4·14a)$$

$$[\rho(\frac{1}{2}v_iv_i+e)(v_j-c_j)-\sigma_{ji}v_i+h_j]n_j=0 \quad \text{在}\sigma\text{上} \quad (4\cdot14b)$$

若过程是绝热的纯力学过程，则（4·14a）可进一步简化为

$$\rho\frac{De}{Dt}=\sigma_{ij}V_{ij} \quad (4\cdot15)$$

V．讨论

现在我们从动量守恒定律导得的运动方程（2·18）式出发，将运动方程两边乘以速度v_i，然后对体积积分，得

$$\int_V\rho\dot{v}_iv_idV=\int_V\sigma_{ij,j}v_idV+\int_V\rho f_iv_idV \quad (4\cdot16)$$

上式右边第一个积分可化为

$$\int_V\sigma_{ij,j}v_idV=\int_S\sigma_{ij}v_in_jds-\int_V\sigma_{ij}v_{i,j}dV=\int_ST_iv_ids-\int_V\sigma_{ij}V_{ij}dV$$

这里我们已经利用了不计面矩和体矩时应力张量的对称性。将上式代入（4·16）式得

$$\frac{D}{Dt}\int_V\frac{1}{2}\rho v_iv_idV+\int_V\sigma_{ij}V_{ij}dV=\int_ST_iv_ids+\int_V\rho f_iv_idV \quad (4\cdot17)$$

上式右边为外力之功率。由式（4·17）得，外力功率除增加系统的动能外还提供使系统产生宏观变形所需的应力功率。将式（4·17）同不考虑面矩和体矩时之热力学第一定律的积分形式（4·8)式

$$\frac{D}{Dt}\int_V\frac{1}{2}\rho v_iv_idV+\frac{D}{Dt}\int_V\rho edV=\int_ST_iv_ids+\int_V\rho f_iv_idV$$

$$+\int_V\rho\dot{q}dV-\int_Sh_in_ids \quad (4\cdot18)$$

比较，可得

$$\frac{D}{Dt}\int_V\rho edV=\int_V\sigma_{ij}V_{ij}dV+\int_V\rho\dot{q}dV-\int_Sh_in_ids \quad (4\cdot19)$$

即内能之增加率等于应力所做之变形功率与传热、供热率之和，而在绝热无耗散的过程中，则内能之增加仅由应力功率来提供，应力在变形过程中所作的功，被全部贮存起来，故该项内能亦常称为应变内能或简称应变能。值得注意的是直接由运动微分方程得到的(4·17)式不能描述连续介质系统的能量平衡，因为它没有包含内能与热能在其中，因而不能代替能量守恒定律即热力学第一定律。为了对这一问题有更清晰的认识我们有必要从微观角度上作些讨论。如前所述体积为dV的微系统ω_x是宏观无限小、微观无限大的系统，这意味着它包含着大量的粒子（原子和分子），它们在粒子间存在的保守力作用下构成一定形状的“框架”，应变ε_{ij}的作用改变着“框架”的形状和大小，也改变着粒子平衡位置间的相对距离，使应力功转换成粒子间的势能，即宏观上所说的应变能。从物理学中我们知道粒子是在不断运动着的，是混乱的、无序的，但在某种外界条件下，它在一段宏观上很短但在微观上很长的时间内的平均速度却可能是有规律的（试设想吃饭时间学生们走向食堂的杂乱运动中，有着走向食堂的平均速度，这里把学生的全体看成微系统ω_x中的分子）。于是粒子的速度可看成其平均速度与无序的脉动速度之和。由于动量与速度成线性关系，这种脉动速度相应的动

量的平均值将为零，因而它将不影响微系统的平均动量与总动量。但是粒子的动能却与粒子速度成二次方关系，它始终为正，因而粒子系的动能除在式(4·18)中第一项反映的由平均速度算得之功能外，还有由无规则的粒子脉动运动所形成的动能，这一部分所具有的能量构成了内能的另一个重要组成部分，但它与应变势能不同，它是与分子的无序运动相应的，难以全部释放出来变为有用功。显然式（4·17）无法概括这种无序的内能，因而它不能表示能量的平衡方程，相反（4·18）式则将此种无序能量包含在内能 e 中，并指明了使这种无序运动的能量增加的可能性。例如具有无序运动的粒子通过微元体边界迁移到该系统中或边界外粒子在边界上造成的微应力所引起的无序动能之增加（注：该脉动的微应力亦不影响动量与动量矩定律），这些作用在客观上就对应着式（4·19）最后一项表示的供热能量（这一点可从§5·4最后一段关于湍流能量方程的讨论得到更明确的认识，请读者注意的是湍流的分析与从粒子运动论的观点对热力学第一定律的讨论有着十分密切的关系，因而我们把有关的数学分析摆在湍流那一节来进行）。另外对耗散变形（例如塑性变形），式（4·19）表示的应力功率也可部分地通过内摩擦及相应的微观机制把有序的能量变为无序的分子运动动能，从而也造成了内能的增加。注意到内能与温度的密切关系（系统的温度表征的正是分子的统计平均动能），因而无论是传热或内部耗散都可造成系统温度的升高。

应该指出的是式（4·17）是通过运动微分方程的积分而求得的，尽管它不能表示连续介质的能量平衡，但是它不管材料是否有耗散或传热，也不管其本构关系如何，它总是成立的。同样的结论对我们即将要推导的虚功率方程也是成立的，事实上如果在求式（4·17）时用 δv_i 代替 v_i，则得到虚功率方程

$$\int_V \rho \dot{v}_i \delta v_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta v_{i,j} dV = \int_S T_i \delta v_i ds + \int_V \rho f_i \delta v_i dV \qquad (4{:}20)$$

若将惯性力 $\rho \dot{v}_i$ 包含在体积力 ρf_i 之中，即令

$$F_i = f_i - \dot{v}_i$$

则式（4·20）化为

$$\int_V \sigma_{ij} \delta V_{i,j} dV = \int_S T_i \delta v_i dS + \int_V \rho F_i \delta v_i dV \qquad (4{\cdot}21)$$

上式两边乘以 dt，并考虑小变形情形，得

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \rho F_i \delta u_i dV + \int_S T_i \delta u_i ds \qquad (4{\cdot}22)$$

式中 u_i 为质点的位移。上式就是著名的虚功原理，它表明，在平衡条件下，外力的虚功与内力的虚功之总和为零。这里，内力的虚功为 $-\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$。事实上对单元体 dV 而言，应力 σ_{ij} 为外力，而内力为单元体内部对外部的反抗力 σ'_{ij}，且 $\sigma'_{ij} = -\sigma_{ij}$（方向相反），因此外力虚功为 $\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV$ 时，则内力虚功为 $-\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV$。

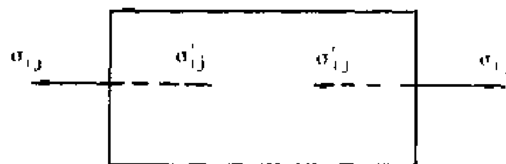


图4·9 单元体的内力 σ'_{ij}

习　题

4·1　若运动为无旋，即涡旋张量w_{ij}处处为零，试确定这种运动下连续方程的形式。

提示：无旋运动的速度有势：$\mathbf{v}=\mathrm{grad}\phi$，其中$\phi$为标量函数。

4·2　试证连续方程的物质形式$D(\rho J)/Dt=0$与空间形式$D\rho/Dt+\rho v_{k,k}=0$等价。

4·3　试证，速度场$v_i=Ax_i/r^3$满足不可压缩流动的连续方程，式中A为常数，$r^2=x_ix_i$。

提示：对不可压缩流动，$v_{k,k}=0$。

4·4　对速度场$v_i=x_i/(1+t)$，试指出$\rho x_1x_2x_3=\rho_0X_1X_2X_3$。

提示：积分求得$x_i=x_i(X_j,\ t)$，并由连续方程积分求得$\rho=\rho(\rho_0,\ t)$。

4·5　有一个二维不可压缩流动，$v_1=A(x_1^2-x_2^2)/r^4$，$v_2=A(2x_1x_2)/r^4$，$v_3=0$，式中$r^2=x_1^2+x_2^2$。试证此运动满足连续方程，且为无旋运动。

4·6　在二维不可压缩流动中，$v_1=-Ax_2/r^2$，式中A为常数，$r^2=x_1^2+x_2^2$，若对所有x_2有$x_1=0$时$v_2=0$，试决定v_2，并指出运动为无旋，且流线为圆。

提示：由$v_{k,k}=0$可得$v_{2,2}$，积分求v_2。对无旋运动，$\mathrm{Curl}\mathbf{v}=0$。

4·7　试证圆柱体坐标之连续方程为

$$r\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta)+r\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0$$

4·8　若$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}$，式中$p$为正常数，试证应力率可用下式表示：

$$V_{ij}\sigma_{ij}=\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}。$$

式中V_{ij}为形变率张量。

4·9　令e为单位质量的内能，试证对理想气体的绝热运动有

$$\rho\frac{De}{Dt}=-p\,\mathrm{div}\mathbf{v}。$$

提示：对理想气体$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}$，，参看习题4·8并利用连续方程，即可得证。

4·10　若$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\lambda V_{kk}\delta_{ij}+2\mu V_{ij}$及$h_i=-kT_{,i}$，式中$h_i$为热流矢量的分量，$T$为温度，$k$为导热系数，试证明，能量守恒方程可写成

$$\rho\frac{De}{Dt}=\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+(\lambda+2\mu)(J_{(1)})^2-4\mu(J_{(2)})+kT_{,ii}+\rho q$$

式中$J_{(1)}$和$J_{(2)}$为形变率张量V_{ij}的第一和第二不变量。

4·11　若$\sigma_{ij}=\beta V_{ik}V_{kj}$，试用形变率张量不变量$J_{(1)}$、$J_{(2)}$和$J_{(3)}$表示应力功率$\sigma_{ij}V_{ij}$。

4·12　试证：

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{2\omega_i}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}(e_{ijk}a_{k,j}+2\omega_jv_{i,j})$$

式中，ω_i为角速度矢量，a_i为加速度矢量。

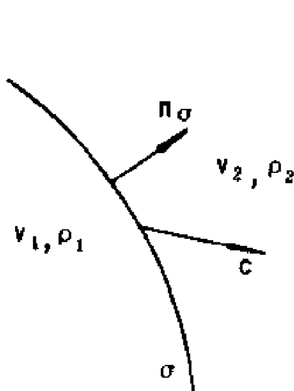
提示：$\dfrac{D\omega_i}{Dt}=\dfrac{1}{2}e_{ijk}a_{k,j}+\omega_j v_{i,j}-\omega_i v_{j,j}$。

4·13* 试证

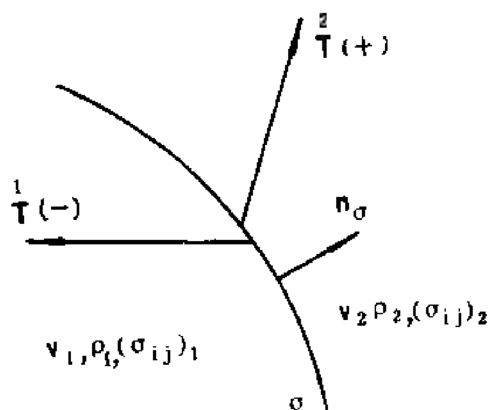
$$\int_S Q\sigma_{ij}n_j ds=\int_V\left[\sigma_{ij}Q_{,j}+\rho Q\left(\frac{Dv_i}{Dt}-f_i\right)\right]dV$$

式中Q为任一标量，矢量或张量的分量，f_i为单位质量之体力。

4·14 设在连续介质内存在以速度 c 运动的物理间断面σ，穿过间断面时，质点运动速度 v 和介质密度发生跃变。设间断面的单位法向矢量为$\mathbf{n}_\sigma$，在间断面正侧区域内，质点运动速度为 $\mathbf{v}_2$，密度为ρ_2，面在负侧区域内，则分别为$\mathbf{v}_1$和ρ_1。在间断面上取一面dS，试根据穿入和穿出此面元之质量相等的条件列出满足质量守恒的跳跃条件。



题4·14图 物理间断面



题4·15图 物理间断面σ

4·15 连续介质内存在以速度 c 运动着的物理间断面，穿过此面时，质点速度v、介质密度ρ和应力张量σ_{ij}发生跃变。设间断面之法线单位矢量为$\mathbf{n}_\sigma$，在间断面正侧区域内，质点速度为$\mathbf{v}_2$，密度为ρ_2，应力为$(\sigma_{ij})_2$，而在负侧区域内，则分别为 $\mathbf{v}_1$，ρ_1和$(\sigma_{ij})_1$。在间断面上取$_1$面元dS，试根据穿过此面元时动量的改变$d(m\mathbf{v})$等于作用在此面元上外力之冲量（$\overset{2}{\mathbf{T}}(+)+\overset{1}{\mathbf{T}}(-))dSt$（其中，T 为作用于此面元两侧单位面积之面力矢量）的原理，求出满足动量守恒的跳跃条件。

第五章　几种工程介质的本构关系及基本方程

前一章我们已经建立了对所有连续介质都适用的守恒定律，但这些定律还不足以确定连续体在外载作用下的应力和变形。显然它们还与连续体本身的力学和热学性质有关，即与反映物质力学和热学性质的所谓本构方程有关。在本章中，本构方程被定义为描述连续介质物理状态的变量间定量关系的方程。气体的状态方程和固体中的应力应变关系都是本构方程的例子。

在力学发展的初期以至今天，工程上某些常用的连续介质是处在正常环境条件（常温、常压、低应力）下工作的，其力学性质比较简单，可用理想线性弹性固体、线性粘性流体等简单本构方程作近似地描述。但是近些年来生产技术和力学各分支的发展，迫切地要求更精确地描述材料在各种条件下（包括高温、高压和大变形）的本构关系，这导致了对本构方程研究的热潮。

本章我们先叙述某些常用工程介质的本构方程，以便为今后几章更复杂的本构方程的研究作些准备。基于这样的目的，我们一开始就简略地提到某些热力学原理，并用它来推导弹性体的本构方程。关于这些原理的更严格的讨论将在第八章中进行。为了沟通固体和流体间的联系，本章还特别用流体力学方法讨论了粘塑性体，有关它的概念还将在第九章中讲到。

§5·1　热力学第二定律、应变能函数及其正定性

Ⅰ．热力学第二定律

热力学第二定律规定了在所有满足能量守恒的热力学过程中，哪一些过程在现实中是不可能出现的，而哪一些过程是允许的，即规定了过程的发展方向。热力学第二定律明确指出存在着两个单值的状态函数，一个是称为绝对温度的 θ，另一个是称为熵的 η。它们具有下列基本性质：

1．　θ 是一个恒正的数，它是经验温度 T 的函数；

2．　熵 $\eta(\theta,\ \varepsilon_{ij})$ 是一个具有广延性质的可加性量，即系统的熵等于它的组成部分的熵之和；

3．　系统熵的变化 $d\eta$ 由两部分组成，即

$$d\eta = d\eta_e + d\eta_i \tag{1·1a}$$

式中 $d\eta_e$ 是熵增量的可逆部分，是由与周围介质的热交换而形成的，且

$$d\eta_e = \frac{dQ}{\theta} \tag{1·1b}$$

而 $d\eta_i$ 是熵增量的不可逆部分，是系统内部的不可逆变化造成的，且有

$$d\eta_i > 0 \qquad （不可逆过程） \tag{1·1c}$$

$$d\eta_i = 0 \qquad （可逆过程） \tag{1·1d}$$

而 $d\eta_i < 0$ 在自然界中是不可能出现的。这里特别要指出的是虽然熵是状态函数，$d\eta$ 是全微

分，但 $d\eta_e$ 与 $d\eta_i$ 在不可逆过程的一般情况下都不是全微分。另外，若 $d\eta=0$，则称之为等熵过程。显然，一个绝热过程成为等熵过程的充要条件是该过程是可逆的。综合式（1·1a）—（1·1d），我们得到

$$\theta d\eta \geqslant dQ \tag{1·1e}$$

等号对可逆过程成立，而不等号则适用于不可逆过程。

以上叙述的热力学第二定律是传统热力学得到的结果，严格说它只适用于有限的均匀系统与静态及拟静态过程。在第八章中我们将通过在微系统 ω_x 内任意可逆和不可逆过程中熵的存在的证明，来确证这些结论对连续介质热力学都是正确的，因而我们可以直接利用这些结果来建立连续介质场的理论系统。

Ⅱ．应变能函数

下面限于讨论可逆系统和可逆过程，即在过程中无不可逆熵产，且只考虑小位移情况。这时有 $V_{ij}dt=d\varepsilon_{ij}$，且 $\rho\simeq\rho_0$，这里 ε_{ij} 为线性化应变分量，ρ_0 为参考构形的密度。对绝大多数物质可不考虑面矩和体矩，如用 $\in=\rho_0 e$ 代表单位体积之内能，则（4：4·14a）式可写成下述形式

$$\dot{\in}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\dot{Q} \tag{1·2a}$$

$$\dot{Q}=\rho\dot{q}-h_{j,j} \tag{1·2b}$$

写成

$$d\in=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}+dQ \tag{1·2c}$$

式中 σ_{ij} 为对称应力张量，$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$ 为单位体积之变形元功；Q 为输给该系统的以单位体积计的热量，它是一个过程量，即 Q 与过程有关，不是状态函数，因此 dQ 不是全微分。但是如上所述，对可逆过程，dQ 与热力学绝对温标 θ 的商却是状态函数 η 的全微分

$$d\eta=\frac{dQ}{\theta} \tag{1·3}$$

利用式（1·3），式（1·2c）可写成

$$d\in=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}+\theta d\eta \tag{1·4a}$$

由上式可见，对不可逆系统，内能 $\in$ 可表成 ε_{ij} 与 η 的函数

$$\in=\in(\varepsilon_{ij},\eta) \tag{1·4b}$$

根据§4·4引入的公理，内能 $\in$ 为状态函数，故其全微分可写为

$$d\in=\frac{\partial\in}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}+\frac{\partial\in}{\partial\eta}d\eta \tag{1·5}$$

这较式（1·4a）和（1·5），由 ε_{ij} 和 η 的独立性可得

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\in}{\partial\varepsilon_{ij}}\bigg|_{\eta} \tag{1·6a}$$

$$\theta=\frac{\partial\in}{\partial\eta}\bigg|_{\varepsilon_{ij}} \tag{1·6b}$$

竖线及其下标表示求偏导数是在该下标后的所有量保持为常数的条件下进行的。上式表明，对等熵（绝热）过程，内能 $\in$ 为应力势函数，使得应力张量 $\underset{\sim}{\sigma}$ 可由内能 $\in$ 对应变张量 $\underset{\sim}{\varepsilon}$ 求导

而得出。

下面引入由下式表达的 Helmholtz 单位体积自由能密度函数 ψ

$$\psi = \in - \eta\theta \tag{1·7}$$

显然由 $\in$ 和 η 为状态函数的结论可直接推出 ψ 亦应为状态函数。将式（1·4a）代入微分后的式（1·7）中，得

$$d\psi = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \eta d\theta \tag{1·8}$$

上式表明可以 θ 代替 η 作为独立的状态变量（θ 与 η 是相关的，它们与不规则的分子运动密切相关，以其中一个来表示即可）则有

$$\psi = (\varepsilon_{ij},\ \theta) \tag{1·9}$$

微分上式得

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta \tag{1·10}$$

比较（1·8)和（1·10）式，由于ε_{ij}和 θ 的独立性可得

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}}\bigg|_{\theta} \tag{1·11a}$$

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\bigg|_{\varepsilon_{ij}} \tag{1·11b}$$

上式表明，对等温过程($\theta = \text{const}$)，自由能 ψ 是应力势函数。

现引入一个称为Gibbs自由能的新状态函数 φ

$$\varphi = \psi - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1·12a}$$

由（1·7)式可得

$$\varphi = \in - \eta\theta - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1·12b}$$

由于状态变量组(ε_{ij}，θ)与状态变量组(σ_{ij}，θ)是一一对应的，故亦可采用七个状态量σ_{ij} 和 θ 作为完全描述该系统状态的独立状态变量，即

$$\varphi = \varphi(\sigma_{ij},\ \theta) \tag{1·13}$$

将式（1·8)代入微分后的（1·12a)式中得

$$d\varphi = -\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - \eta d\theta \tag{1·14}$$

因为 φ 是状态函数，由式（1·13）得其全微分为

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} d\theta \tag{1·15}$$

比较式（1·14）和（1·15）可得

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}}\bigg|_{\theta} \tag{1·16a}$$

$$\eta = -\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\bigg|_{\sigma_{ij}} \tag{1·16b}$$

上式表明，对等温过程，$-\varphi$ 是应变势函数。即等温条件下它蜕化为弹性理论中的余能函数。

在弹性体中，我们曾定义了一个以应变分量瞬时值 ε_{ij} 为自变量的状态函数W，它具有

下列性质：

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{1·17}$$

即$W(\varepsilon_{ij})$为应力势函数，亦称为应变能函数，由此得变形功

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}=\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}=dW \tag{1·18}$$

为全微分，上式表明弹性体由应变状态Ⅰ至应变状态Ⅱ变形过程中应力所做的变形功与变形路径无关，此变形功以应变能的形式贮存于弹性体内。由式（1·6a）和（1·11a)可见，对绝热(等熵)过程，内能$\in$即为应变能函数，而对等温过程，自由能ψ即为应变能函数。在这两种情况下，应变能函数不显含温度作为变量，因而应力应变关系中也不显含温度。而对其他热力学过程，则应变能函数还应显含温度作为自变量，即在一般情况下，W为ε_{ij}和θ之函数。

在自然状态邻域，弹性体的应变能函数具有正定性，从而使应变能函数成为过程进行方向和平衡条件的判据，并成为推导能量极值原理的基础。下面就来加以证明。

Ⅲ．热力学平衡条件和应变能函数的正定性

第二定律指明了自然界过程的方向，指明了运动方向必须保证$d\eta_i\geqslant 0$，而使$d\eta_i<0$的运动是不可能发生的。然而，在一定条件下什么是运动的终点？终点就是热力学的平衡状态，即热力学状态变量不再变化的状态。只要热与力学量的边界条件不改变，就不会有过程自发地发生。

下面证明著名的 W.Gibbs 热力学平衡条件。Gibbs 热力学平衡条件有下述两种等价的表述：

1. 设系统在热力学过程中保持内能$\in$不变，则系统在状态A下达到热力学平衡的充要条件是熵η取最大值（参看图5·1a），即

$$(\Delta\eta)_{\in}<0$$

和

$$(\delta\eta)_{\in}\leqslant 0 \tag{1·19}$$

这里$\delta\eta$为一阶变分，而$\Delta\eta$还包含高阶变分。

2. 设系统在热力学过程中保持熵不变，则系统在状态A下达到热力学平衡的充要条件是内能$\in$处于极小值(参看图5·1b)，即

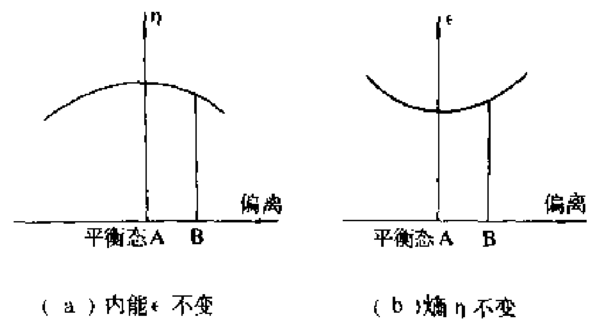


图5·1 热力学平衡条件

$$(\Delta\in)_\eta>0$$
$$(\delta\in)_\eta\geqslant 0 \tag{1·20}$$

为证明上述表述，在状态A的邻近取另一状态B，两种状态的状态变量分别为：

状态A　　　　状态B

$$\in,\ \sigma_{ij},\ \varepsilon_{ij},\ \eta,\ \theta \qquad \in+\Delta\in,\sigma_{ij}+\Delta\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}+\Delta\varepsilon_{ij},\eta+\Delta\eta,\theta+\Delta\theta \tag{1·21}$$

根据热力学第一定律（4: 4·14a)，这些变量间须受如下约束

$$\Delta\in=\Delta Q+(\sigma_{ij}+\Delta\sigma_{ij})\Delta\varepsilon_{ij} \qquad \delta\in=\delta Q+\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \tag{1·22}$$

为证明第一种表述，设边界固定，$\Delta\varepsilon_{ij}=0$，外界对系统不做功，且$\Delta\in=0$则由式（1·22）得$\Delta Q=0$。系统过程发展的方向应使$\theta\Delta\eta>\Delta Q$，但现在$\Delta Q=0$，故仅当$\Delta\eta>0$时过程才能进行，而相反的过程，即使$\Delta\eta<0$的过程是不可能发生的。因此，若式（1·19）成立，则状态A不可能向其邻近状态演变，故是一个热力学平衡态。

为证明第二种表述，仍设外界对系统不做功，且$\Delta\eta=0$，则由式（1·22）得$\Delta\in=\Delta Q$。热力学过程发展的方向应使$\Delta Q<\theta\Delta\eta=0$，也即$\Delta\in<0$，而相反的过程，即使$\Delta\in>0$的过程是不可能发生的。因此若式（1·20）成立，则状态A不可能向其邻近状态演变。因而是一个热力学平衡态。

若不可逆过程是在等温条件下进行的，则过程进行方向满足的条件可在（1·22）式的第一式中以$\theta\Delta\eta$代替ΔQ并注意（1·1e）而求得为

$$\Delta\in-\theta\Delta\eta<(\sigma_{ij}+\Delta\sigma_{ij})\Delta\varepsilon_{ij} \tag{1·23}$$

在等温条件下，上式左边即为自由能增量$\Delta\psi$。若固定边界，外界不做功，则上式右边为零，则过程进行的方向应满足$(\Delta\psi)_\theta<0$，$(\delta\psi)_\theta<0$。因此，等温条件下，A为热力学平衡状态的充要条件是在A邻域中任一状态的自由能都高于（或等于）A的自由能。若以A为自由能ψ的参考状态，则该充要条件可用下述数学式表达

$$\begin{aligned}&(\Delta\psi)_\theta>0\\&\delta(\psi)_\theta\geqslant0\end{aligned} \tag{1·24}$$

由上式可见在等熵$(\Delta\eta=0)$和等温$(\Delta\theta=0)$条件下，热力学平衡的条件是应变能函数W达到极小值，即

$$\left.\begin{aligned}&\Delta W>0\\&\delta W\geqslant0\end{aligned}\right\} \tag{1·25}$$

在等温条件下，$W=\psi$，在等熵条件下，$W=\in$。对弹性体，自然状态显然是一个热力学平衡态，若取自然状态的应变能等于零，则变形状态的应变能必为正，即小变形下，弹性体的应变能为正定函数。

§5·2　线性弹性固体

某些工程结构构件在外载荷作用下只产生很小的变形，因而其变形可用线性化应变张量ε_{ij}来描述，且在除去外载后又能恢复到原来的尺寸和形状。在这类连续体的整个变形过程中，其应力状态与应变状态间存在一一对应的关系，而与变形历史无关（一般说这种关系还可能依赖于温度），这类材料可用理想线弹性固体的模型来近似。为简单起见，我们先限于讨论等温或绝热情况，如前所述，在这两种情况下，本构方程中不显含温度θ，只是两种情况下的弹性常数不同。不过对金属来说其弹性常数间的差别是很小的。

理想线弹性固体可由应变能函数与应变张量间的关系来定义，也可直接由应力张量与应变张量间的线性关系来定义。下面我们遵循前一途径。

我们把具有如下性质的应变能函数W的连续介质称为线弹性固体：

（1）应变能函数W只是线性化应变张量ε_{ij}的二次函数；

（2）外力对连续介质所做的变形功全部以应变能的形式贮存起来。

由上得

$$W=\frac{1}{2}c'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+c'_{ij}\varepsilon_{ij}+c'' \tag{2·1}$$

及

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{2·2}$$

由（2·1）和（2·2）得线弹性固体的应力应变关系为

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{2}(c'_{ijkl}+c'_{klij})\varepsilon_{kl}+c'_{ij}$$

或

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}+c'_{ij} \tag{2·3a}$$

式中

$$c_{ijkl}=\frac{1}{2}(c'_{ijkl}+c'_{klij}) \tag{2·3b}$$

且弹性常数 c_{ijkl} 具有对称性

$$c_{ijkl}=c_{klij} \tag{2·4}$$

设弹性体具有自然状态并以自然状态的构形作为参考构形，则在参考构形下，$\varepsilon_{ij}=0,\sigma_{ij}=0$，由此$c'_{ij}=0$。设应变能函数由自然状态算起，即自然状态下 $W=0$，则 $c''=0$

于是最后得

$$W=\frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{2·5}$$

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2·6}$$

即应变能W为应变分量的齐二次函数，而应力与应变间成齐次线性关系。由应力张量和应变张量的对称性得

$$c_{ijkl}=c_{jikl} \tag{2·7a}$$

$$c_{ijkl}=c_{ijlk} \tag{2·7b}$$

根据张量商律可得 c_{ijkl} 为四阶张量。由于张量 c_{ijkl}具有（2·4）、（2·7a）和（2·7b）指出的对称性，其独立的分量数目由81个减至21个，（关于独立弹性常数，在一般弹性力学书中都进行了讨论，本书中将在第九章中对粘弹性材料独立函数的个数进行详细分析，它的特殊情况即为独立弹性常数的个数问题）。四阶张量的坐标变换式为

$$\overline{c}_{pqrs}=n_{pi}n_{qj}n_{rk}n_{sl}c_{ijkl} \tag{2·8a}$$

式中$\overline{c}_{pqrs}$和c_{ijkl}分别为新和旧笛卡尔坐标系中四阶张量c的分量，而$n_{pi}=\cos(\overline{x}_p,x_i)$为新、旧坐标轴间夹角的方向余弦。

设材料是各向同性的，则坐标变换时本构关系的函数形式不变，即如果在旧坐标系中，有

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2·8b}$$

则在新坐标系中为

$$\overline{\sigma}_{ij}=\overline{c}_{ijkl}\overline{\varepsilon}_{kl} \tag{2·8c}$$

且

$$\overline{c}_{ijkl}=c_{ijkl} \tag{2·8d}$$

这意味着四阶张量 c 的分量 c_{ijkl} 在任何坐标系中应相同，即 c 为四阶各向同性张量，可用下式表示（关于各向同性的进一步讨论请参看§9·6和附录 B§3）

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\phi\delta_{ik}\delta_{jl}+\psi\delta_{il}\delta_{jk}$$

令 $\phi=\mu+\nu$，$\psi=\mu-\nu$，代入上式得

$$\begin{aligned}c_{ijkl}&=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\nu(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})\\&=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\nu e_{rij}e_{rkl}\end{aligned}$$

根据应力张量的对称性（对指标 i，j 对称），上式右边最后一项应为零，最后得

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2·9}$$

将上式代入（2·6）式得各向同性线弹性体的应力应变关系，即本构方程：

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2·10}$$

式中λ、μ为 Lamé 常数。式（2·10）就是著名的虎克定律，而式（2·6)则是其最一般的形式，常被称之为广义虎克定律。

将式（2·10）缩并，得

$$\sigma_{kk}=(3\lambda+2\mu)\varepsilon_{kk} \tag{2·11a}$$

或

$$\sigma=K\theta \tag{2·11b}$$

式中

$$\sigma=\frac{1}{3}\sigma_{kk} \tag{2·12a}$$

为平均应力，

$$\theta=\varepsilon_{KK} \tag{2·12b}$$

为体积应变，

$$K=\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu) \tag{2·13}$$

为体积弹性模量。

引入应力偏量 s_{ij} 和应变偏量 e_{ij}

$$\left.\begin{aligned}s_{ij}&=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\\e_{ij}&=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{2·14}$$

则本构方程（2·10）可改写为

$$\left.\begin{aligned}s_{ij}&=2\mu e_{ij}\\\sigma_{kk}&=3K\varepsilon_{kk}\end{aligned}\right\} \tag{2·15}$$

当有温度改变时，各向同性热弹性体的本构方程可在式（2·10）的基础上加上与温度有关的项。当温度改变不大时，可认为由温度引起的应力与温度改变（$T-T_0$）成正比。注意到对各向同性材料温度应力也是各向同性的，则热弹性体的本构方程可写为

$$\sigma_{ij}=2\mu e_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}-\beta(T-T_0)\delta_{ij} \tag{2·16}$$

或对 ε_{ij} 解出，并采用工程弹性常数即杨氏弹性常数E和泊松比 ν，可得：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}+\alpha(T-T_0)\delta_{ij} \tag{2·17}$$

式中，α 为线膨胀系数，且

$$\alpha = \beta \frac{1-2\nu}{E} \tag{2·18}$$

lamé常数与工程弹性常数间的关系为

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{2·19}$$

不考虑温度改变时，各向同性弹性体的应变比能为

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} (\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij}$$

$$= \int_0^{\theta} \lambda\theta d\theta + \int_0^{\varepsilon_{ij}} 2\mu\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\lambda\theta^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{2·20}$$

可见$W \geqslant 0$，等号只在所有应变分量均为零时成立，即W为正定函数。

本构方程的一些特例：

单向拉伸：应力分量只有σ_{11}不为零，则

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} \tag{2·21}$$

纯剪切：应力分量仅$\sigma_{12} = \sigma_{21}$不为零，则

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12} \tag{2·22}$$

各向均压：$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$，其余应力分量为零，得

$$\theta = -\frac{p}{K} \tag{2·23}$$

根据能量守恒原理，单向拉伸不能引起该方向之压缩，各向均压不能引起体积之增加，纯剪只能引起剪应力方向之剪切，由此得出

$$E > 0, \quad \mu > 0, \quad K > 0 \tag{2·21}$$

由此，由（2·19）后两式可得

$$\frac{1}{2} \geqslant \nu > -1, \quad 3\mu \geqslant E > 0 \tag{2·25}$$

此为热力学给于弹性常数的限制。

§5·3　牛顿粘性流体

流体的特性之一是，即使在静止不变形状态下也可能存在静压力 p。对粘性流体，应力张量与形变率张量有关。若应力张量和形变率张量成线性关系，则称之为牛顿粘性流体。对牛顿粘性流体，本构方程可写为

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ijkl}V_{kl} \tag{3·1}$$

考虑到流体为各向同性的，则相似于线弹性固体，上式可写成为

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda V_{kk}\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \tag{3·2}$$

不同的是这里的 λ 和 μ 为粘性系数，而非弹性常数。

现在让我们考虑（3·2)式的下述两种特殊情况：

1. 理想流体。若流体的粘性系数为零，则称之为理想流体。对粘性系数小的流体，如水和空气等，在速度梯度不大的情况下，例如边界层外的流体流动，其粘性阻力较之惯性力可以略去不计，则常简化为理想流体。对理想流体，（3·2)式简化为

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{3·3}$$

且 p 的大小与物性无关，故上式已不能视为本构方程。对理想气体，压力 p 通过状态方程同体积与温度相联系

$$pV = \nu RT \tag{3·4}$$

这里 ν 为气体的摩尔数，R 为普适气体常数。

在低速流动下，可将理想流体看成不可压缩，于是由 Euler 运动方程（4:2·18)，其控制方程可写为

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i &= \rho\frac{Dv_i}{Dt} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3·5a}$$

式中 p 以压为正。上式写成矢量形式为（字母上加点表物质导数）

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{grad}p + \rho\mathbf{f} &= \rho\dot{\mathbf{v}} \\ \mathrm{div}\mathbf{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3·5b}$$

若体力有势，即存在势函数 β 使得

$$\mathbf{f} = -\mathrm{grad}\beta \tag{3·6}$$

则由式（3·5)得

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \beta\right) \tag{3·7}$$

即加速度是有势的。

若流动为有势的，即存在势函数 φ 使

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\varphi \tag{3·8}$$

则得

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{D}{Dt}\mathrm{grad}\varphi = \mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) \tag{3·9}$$

由（3·7)和（3·9)式得

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \frac{p}{\rho} + \beta\right) = 0 \tag{3·10}$$

若流动为有势且稳定，则上式得

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \frac{p}{\rho} + \beta = \mathrm{const.} \tag{3·11}$$

上式给出的就是著名的伯努利方程。

2. 平均压力与形变率无关的情况。对绝大多数气体或液体，只要速度不大，不致于出现激波或水锤，都可简化为这种情况。

将（3·2）式缩并，得

$$\sigma_{kk} = -3p + (3\lambda + 2\mu)V_{kk}$$

设粘性流体的平均压力（$-\sigma_{kk}$）与形变率无关，则应有 $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$。将此 λ 值代入（3·2）得平均压力与形变率无关情况下的本构方程

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu V'_{ij} \tag{3·12}$$

式中

$$V'_{ij} = V_{ij} - \frac{1}{3}V_{kk}\delta_{ij} \tag{3·13}$$

为形变率偏量。式（3·12）可写为

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3}\mu V_{kk}\delta_{ij} \tag{3·14}$$

对理想气体，压力 p 由下列状态方程同气体的温度和密度相联系

$$p = (c_p - c_V)\rho T \tag{3·15}$$

这里 c_p 和 c_V 为定压和定容比热，它们的单位为J/（kg·K）〔焦耳/（公斤·开尔文）〕。而单位质量的比内能为

$$e = c_V T \tag{3·16}$$

除状态方程（3·15）外，由式（4;1·5）、（4;2·18）、（4;4·10）可得其余的基本方程

连续方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0 \tag{3·17}$$

运动方程：

$$\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) = \rho f_k + \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} \tag{3·18}$$

能量守恒方程：

$$\rho\frac{De}{Dt} = \sigma_{ij}V_{ij} - h_{j,j} \tag{3·19}$$

将式（3·14）代入（3·18），并将 V_{ij} 用速度 v_i 表示 $V_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$，则运动方程改写为

$$\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) = \rho f_k - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_k}\right) \tag{3·20}$$

此式称为 Navier-Stokes 方程

将热传导定律

$$q_j = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j} \tag{3·21a}$$

及式（3·16）代入式（3·19）得

$$\rho c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_j\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = \sigma_{ij}V_{ij} + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \tag{3·21b}$$

注意到

$$\sigma_{ij}V_{ij}=\left[-p\delta_{ij}+2\mu\left(V_{ij}-\frac{1}{3}V_{kk}\delta_{ij}\right)\right]V_{ij}$$

$$=-pV_{kk}+2\mu V'_{ij}\left(V'_{ij}+\frac{1}{3}V_{kk}\delta_{ij}\right)$$

$$=-p\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+2\mu V'_{ij}V'_{ij}$$

$$=-p\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+4\mu J'_2 \qquad (3\cdot21c)$$

式中$J'_2=\frac{1}{2}V'_{ij}V'_{ij}$为形变率偏量第二不变量，则能量方程改写为

$$\rho c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_j\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)=-p\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+4\mu J'_2+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\partial x_j} \qquad (3\cdot22)$$

六个方程（3·15）、（3·17）、（3·20）和（3·22）包含六个待求函数，即压力p、密度ρ、温度T和三个速度分量v_i。在给定初始条件和边界条件下，问题可解。

§5·1 湍　　流*

设有粘性不可压缩流体流经等截面圆管。当雷诺数$R_e=\rho v_m D/\mu$（式中v_m为平均流速，D为管内径，μ为粘性系数）不大时，管中流动是稳定的、层次分明的，称之为层流，我们可用上节粘性流体的基本方程求得管中流动的准确解。但当管中流速较大，雷诺数R_e大于某值时，管中流动已不再是层次分明的了，流动变成不稳定的，混乱的，不定常的，流动带有明显的随机性，称之为湍流（Turbulence）。湍流现象与不规则的分子运动有很多相似的地方。

设湍流瞬时速度为

$$v_i=v_i(x_j,\ t) \qquad (4\cdot1)$$

虽然v_i是随机函数，其随空间点和时间的变化显得不规则，但是多次重复实验按某种统计平均方法算得的平均流速$\overline{v}_i(x_j,\ t)$却是有一定规律的。于是可把湍流流场的流速v_i分解为缓慢变化的平均流速$\overline{v_i}$与快速随机的脉动流速v'_i之和

$$v_i=\overline{v_i}+v'_i \qquad (4\cdot2)$$

对形变率V_{ij}、应力分量σ_{ij}和内能密度e也可作相似的分解。一般地设f为随机值，$\overline{f}$为其平均值，而f'为其脉动值，

$$f=\overline{f}+f' \qquad (4\cdot3)$$

注意这里引入的平均是对一个从宏观来看很短但微观来看却是很长的时间区段T来求平均值的，即$\overline{f}=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}f\,dt$，这种平均值的概念意味着其脉动值的平均值为零，亦即

*本节在初学时可以略去，参见[58]。

$$\bar{f}' = 0 \tag{4·4}$$

若假设求平均值与求偏导数的运算次序可以交换，则有

$$(f_{,0})^- = \bar{f}_{,0} \tag{4·5a}$$

$$(f_{,i})^- = \bar{f}_{,i} \tag{4·5b}$$

这里下标中逗号后加“0”表示对时间 t 求偏导数，而逗号后加“i”则同前面一样表示对坐标x_i求偏导数。而括号右上方加“—”表对括号中的式子求平均值。

显然对平均值求平均，仍等于原平均值，即

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f} \tag{4·6}$$

若再假设

$$(\bar{f}g)^- = \bar{f}\,\bar{g} \tag{4·7}$$

则利用式（4·3）、（4·4）、（4·6）和（4·7）可得

$$\begin{aligned}(fg)^- &= [(\bar{f}+f')(\bar{g}+g')]^- \\ &= (\bar{f}\bar{g})^- + (\bar{f}g')^- + (f'\bar{g})^- + (f'g')^- \\ &= \bar{f}\,\bar{g} + (f'g')^-\end{aligned} \tag{4·8}$$

考虑无体力的不可压缩流体。其连续性方程为

$$v_{i,i} = 0 \tag{4·9}$$

运动方程的局部形式和积分形式为（参见式（4:2·18）和（4:2·16））

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = \sigma_{ij,j} \tag{4·10}$$

和

$$\int_V \rho\frac{Dv_i}{Dt}dV = \int_S \sigma_{ij}n_j ds$$

或

$$\int_V \rho v_{i,0}dV = \int_S \sigma_{ij}n_j ds - \int_V \rho v_j v_{i,j}dV \tag{4·11}$$

热力学第一定律的积分形式在无内热源并不计体矩、面矩情况下为（见4:4·18）式）：

$$\int_V \rho\frac{De}{Dt}dV + \int_V \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v_iv_i\right)dV = \int_S(\sigma_{ij}v_i - h_j)n_j ds$$

或

$$\begin{aligned}\int_V \rho\left(e+\frac{1}{2}v_iv_i\right)_{,0}dV &= \int_S(\sigma_{ij}v_i - h_j)n_j ds \\ &\quad - \int_V \rho v_j\left(e+\frac{1}{2}v_iv_i\right)_{,j}dV\end{aligned} \tag{4·12}$$

注意到式（4·9），并利用Gauss定理，可将式（4·11）和(4·12)右边的体积分化为面积分，这样就得如下形式的动量守恒定律和热力学第一定律

$$\int_V \rho v_{i,0}dV = \int_S(\sigma_{ij} - \rho v_iv_j)n_j ds \tag{4·13}$$

$$\int_V \rho \left(e + \frac{1}{2}v_i v_i \right)_{,0} dV = \int_S (\sigma_{ij} v_i - h_j) n_j ds$$

$$- \int_S \rho v_j \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) n_j ds \quad (4\text{·}14)$$

现应用式（4·4）和（4·5b)于连续性方程（4·9)式得

$$\bar{v}_{i,i} = 0 \quad (4\text{·}15)$$

可见速度的平均值 $\bar{v}_i$ 也遵守连续方程。再对动量定理（4·13）式作平均运算

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_V \rho v_{i,0} dV dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_S (\sigma_{ij} - \rho v_i v_j) n_j ds dt$$

交换积分次序得

$$\int_V \rho (v_{i,0})^{-} dV = \int_S (\sigma_{ij} - \rho v_i v_j)^{-} n_j ds$$

再利用式（4·5a）和（4·8)可得

$$\int_V \rho \bar{v}_{i,0} dV = \int_S (\bar{\sigma}_{ij} - \rho \bar{v}_i \bar{v}_j - \rho (v_i' v_j')^{-} n_j ds \quad (4\text{·}16)$$

引入记号

$$\sigma^*_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \rho (v_i' v_j')^{-} \quad (4\text{·}17)$$

则（4·16）式简化为

$$\int_V \rho \bar{v}_{i,0} dV = \int_S (\sigma^*_{ij} - \rho \bar{v}_i \bar{v}_j) n_j ds \quad (4\text{·}18)$$

这样，若平均应力 $\bar{\sigma}_{ij}$ 用称之为 Reynolds 应力的 $-\rho(v_i' v_j')^{-}$ 来补充，则动量守恒定理对平均流动也保持正确[58]。微应力的物理意义是由于微系统边界面处的脉动速度引起穿过界面的动量迁移所对应的附加应力。由式（4·18）可得动量守恒的局部形式

$$\rho \dot{\bar{v}}_i = \sigma^*_{ij,j} \quad (4\text{·}19)$$

符号上加一点仍表求物质导数。但这里物质导数是对平均速度计算的。

同样，对热力学第一定律（4·14）式作平均化运算得

$$\int_V \rho \left[\bar{e} + \frac{1}{2}\bar{v}_i \bar{v}_i + \frac{1}{2}(v_i' v_i')^{-} \right]_{,0} dV = \int_S [\bar{\sigma}_{ij} \bar{v}_i + (\sigma_{ij}' v_i')^{-} - h_j] n_j ds$$

$$- \int_S \rho \left[\bar{e}\bar{v}_j + (e' v_j')^{-} + \frac{1}{2}\bar{v}_i \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{v}_i (v_i' v_j')^{-} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(v_i' v_i')^{-} \bar{v}_j + \frac{1}{2}(v_i' v_i' v_j')^{-} \right] n_j ds \quad (4\text{·}20)$$

引入记号

$$e^* = \bar{e} + \frac{1}{2}(v_i' v_i')^{-} \quad (4\text{·}21)$$

和

$$h_j^* = h_j - (\sigma'_{ij} v'_i)^- + \rho(e' v'_j)^- + \frac{1}{2}\rho(v'_i v'_i v'_j)^-$$

$$= h_j - (\sigma'_{ij} v'_i)^- + \rho\left[\left(e' + \frac{1}{2} v'_i v'_i\right) v'_j\right]^- \qquad (4\cdot22)$$

则式（4·20）可简为

$$\int_V \rho\left(e^* + \frac{1}{2}\bar{v}_i \bar{v}_i\right)_{,t_0} dV = \int_S (\sigma^*_{ij}\bar{v}_i - h^*_j) n_j ds$$

$$- \int_S \rho\left(e^* + \frac{1}{2}\bar{v}_i \bar{v}_i\right)\bar{v}_j n_j ds \qquad (4\cdot23)$$

其相应的局部形式为

$$\rho\dot{e}^* = \sigma^*_{ij}\bar{V}_{ij} - h^*_{j,j} \qquad (4\cdot24)$$

由此可见，若平均应力用 Reynolds 应力补充，平均内能密度用脉动动能$\frac{1}{2}(v'_i v'_i)^-$补充，热流h_j用式（4·22）右边后两项补充，则热力学第一定律对平均流动保持正确。对上式中各量可作如下的物理解释。e^*为平均内能与湍流脉动动能之和。h_j^*中的$-(\sigma'_{ij} v'_i)^-$为微应力 σ'_{ij}在脉动变形上所做的功率，而 $\rho\left[\left(e' + \frac{1}{2} v'_i v'_i\right) v'_j\right]^-$为脉动速度引起的通过微系统界面对流的脉动动能。这里，脉动运动引起的界面上微应力所做的附加功及脉动动能通过界面的对流，以穿过界面附加热流的形式来表现，即以热能的形式来表现。

§5·5 粘塑性体*

粘塑性体的特征是它在载荷达到足够大之后才出现显著的流动，其流动速率依赖于介质的粘性，由于它兼有塑性与粘性的特征，故因之得名。研究粘塑性体不仅会使我们对这种介于固体与流体之间的连续介质的力学特性有一了解，而更重要的是它将为许多工艺过程的改善（如塑料和金属在高温下的成型过程），不同塑性物质通过管道和小孔的流动规律的分析和浓稠润滑材料润滑理论的研究提供必要的理论基础。

Ⅰ. 本构方程

由上可见，粘塑性体与牛顿流体流动的基本区别在于：后者只要有剪应力就会产生流动，而前者则必须超过一个称之为屈服应力K的常数之后，流动才开始。对于纯剪状态可以假定剪应力σ_{12}小于K之前，材料是刚性的，而σ_{12}超过K之后，V_{12}与σ_{12}有相同的符号，且其值正比于$|\sigma_{12}|-K$。如果引入粘性系数μ和函数

$$F = 1 - \frac{K}{|\sigma_{12}|} \qquad (5\cdot1)$$

则剪应力与剪应变率的关系可写成下述形式

*参见[5]。本节在初次学习时可以略去。

$$2\mu V_{12} = \begin{cases} 0 & F < 0 \\ F\sigma_{12} & F \geqslant 0 \end{cases} \tag{5·2}$$

上述本构方程首先由 Bingham 提出，因之具有上述特性的材料被称之为 Bingham 体。

对于一般的应力状态，Hohensmser 和 Prager 将 Bingham 关系推广如下：

$$F = 1 - \frac{K}{\sqrt{T_{(2)}}} \tag{5·3}$$

$$2\mu V_{ij} = \begin{cases} 0 & F < 0 \\ F\sigma'_{ij} & F \geqslant 0 \end{cases} \tag{5·4}$$

式中$T_{(2)}$是应力偏量的第二不变量，σ'_{ij}为应力偏量。因$\sigma'_{ii}=0$，则由式(5·4)可推得$V_{ii}=0$，这表征着材料是不可压缩的，且当$F<0$时呈现着刚体的属性。

自乘方程（5·4)第二式的每一边，可求得下述关系式

$$4\mu^2 J_{(2)} = F^2 T_{(2)} = (\sqrt{T_{(2)}} - K)^2 \tag{5·5}$$

其中$J_{(2)}$表示形变率的第二基本不变量。从式（5·3)和(5·5)式推出

$$F = \frac{2\mu J_{(2)}^{1/2}}{K + 2\mu J_{(2)}^{1/2}} \tag{5·6}$$

将上式代入式（5·4)的第二式中可得

$$\sigma'_{ij} = \left(2\mu + \frac{K}{J_{(2)}^{1/2}}\right) V_{ij} \tag{5·7}$$

在本构方程（5·7）中置$\mu = 0$，则得到下述本构方程

$$\sigma'_{ij} = \frac{K}{J_{(2)}^{1/2}} V_{ij} \tag{5·8}$$

上式描述了不可压缩的理想塑性材料，它是由 Von-Mises 首先加以研究的。将式（5·8)的两边自乘，可得应力偏量必须满足 Von-Mises 屈服条件

$$T_{(2)} = K^2 \tag{5·9}$$

显然（5·7）和（5·8）都只适用于形变率不为零的情况；若$T_{(2)}<K^2$则表明应力状态在应力空间的某个称之为屈服面的超曲面内，此时材料呈现出刚体的性能。

Ⅱ. 基本方程、平行面间的粘塑性流动

仿照推导Navier-Stokes 方程同样的步骤，但代替式（3·14），采用本构方程（5·7)，并应用运动学方程（3:2·4）和 Euler运动方程（4:2·18），忽略体力就可求得下述基本方程

$$\rho\frac{\partial v_k}{\partial t} + \rho v_j\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} + K\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{V_{jk}}{J_{(2)}^{1/2}}\right) \tag{5·10}$$

这一控制方程与 Navier-Stokes 方程的不同之处仅在于非线性的最后一项，它是由本构方程（5·7）中的塑性项引起的。这一方程的一般解较难求得，在本节中我们将讨论几种簡

单情况，其目的是使读者对于这类连续介质的定解问题有一初步了解。

首先让我们考虑下述特殊情况，即应变率分量间存在一个以标量函数$\varphi(x,t)$表示的公因子，这使得V_{ij}可写成

$$V_{ij}(x,t)=\varphi(x,t)W_{ij}(t) \tag{5·11}$$

在这种情况下，式(5·10)中的最后一项将为零。事实上在抽出公因子φ之后，若忆及式(3.2·25)我们有

$$V_{jk}/J_{(2)}^{1/2}=W_{jk}/W_{(2)}^{1/2}$$

$$W_{(2)}=\frac{1}{2}W_{rs}W_{rs}$$

而上两式右边只依赖于时间，故式（5·10）最后一项所求的空间导数为零，这样其控制方程将与Navier-Stokes方程完全一样，因而对任何适合式(3·20)的牛顿流体的速度场的通解，也适合于相应的粘塑性流体。其不同点在于应力状态和边界条件上。

为了说明粘塑性体与牛顿流体的区别，让我们考虑一个处于静止的平行壁间的稳定直线流动。在（图5·2)所示的坐标下，显然有

$$v_2=v_3=0 \quad 和 \quad V_{22}=V_{33}=V_{23}=V_{13}=V_{11}=0 \tag{a}$$

上式中V_{11}为零是由不可压缩条件$\partial v_i/\partial x_i=V_{ii}=0$推出的，在这种情况下，粘性流体与粘塑性体的控制方程一样，它们可由Navier-Stokes方程或式（5·10）求得为

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}=0 \tag{5·12}$$

由流场稳定及各截面相同的条件不难看出此处压力梯度$\partial p/\partial x_1$必为一常数，设为c，即

$$-\partial p/\partial x_1=c$$

则控制方程（5·12）变为

$$\mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}=-c \tag{5·13}$$

由此得

$$v_1=-\frac{c}{2\mu}x_2^2+Dx_2+E \tag{5·14}$$

对牛顿流体其边界条件为

$$x_2=0 \quad 和 \quad x_2=h\ 处 \quad v_1=0 \tag{5·15}$$

由式（5·15）定出常数E和D后可得

$$v=\frac{c}{2\mu}x_2(h-x_2) \tag{5·16}$$

上式给出的牛顿流体的抛物线速度分布显示如（图5·2b）中。对粘塑性体在决定边界条件时，必须牢记式(5·13)只适用于剪应力$\sigma_{12}>K$的靠近板边缘的区域，中间部分则由于$\sigma_{12}<K$而象刚体一样运动（图5·2c），刚性运动区的尺寸极易由分界处剪应力等于τ_s的条件，根据中心部分的平衡关系求得为$2K/c$，故分界处的坐标为x_b为

$$x_b = \frac{h}{2} - \frac{K}{c} \tag{5·17}$$

这样我们有下述对刚塑性体成立的边界条件：

$$\begin{aligned} x_2 = 0, \quad & v_1 = 0 \\ x_2 = x_b, \quad & \partial v_1/\partial x_2 = 0 \end{aligned} \tag{5·18}$$

利用条件（5·18）可决定式（5·14）中的系数，最后得到

$$v = \frac{c}{2\mu}\left\{x_2(h-x_2) - 2\frac{K}{c}x_2\right\} \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant x_b \tag{5·19a}$$

当x_2超过x_b，剪应力降到屈服应力K以下，粘塑性材料象刚体一样运动。若记其速度为$\overline{v}$，则由式（5·17）和（5·19）可求得其表达式为

$$\overline{v} = \frac{c}{2\mu}x_b^2 \tag{5·19b}$$

（图5·2c）给出了与（图5·2b）具有同样粘性与压力梯度的粘塑体的典型的速度分布。它所对应的剪应变率的分布则示于（图5·2a）之$BCC'B'$中，而AA'则表示牛顿流体的剪应变率之分布。对粘性流体与粘塑性体的平均速度v_0亦可分别求得为

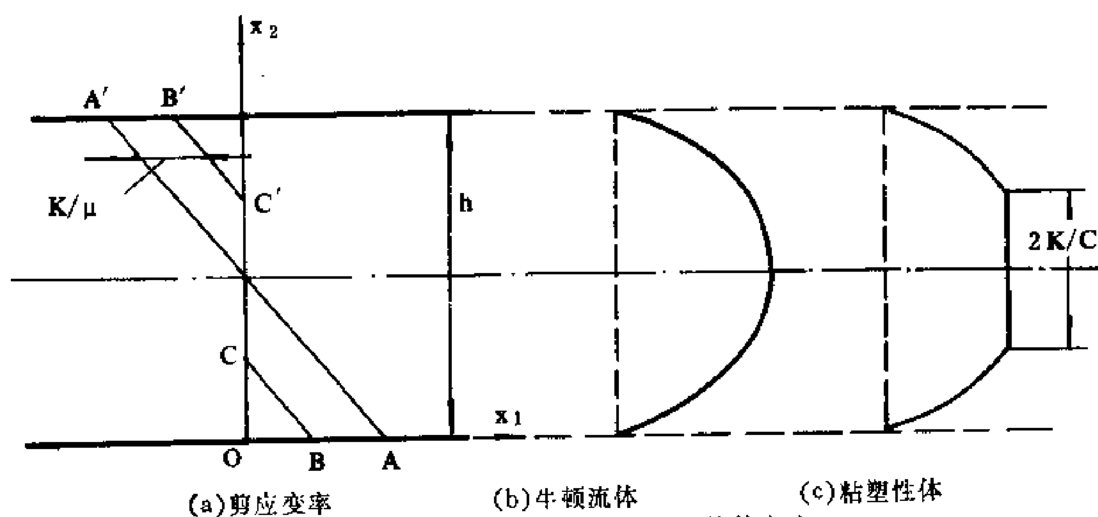


图5·2　平行壁间牛顿流体与粘塑性体的流动

$$v_0 = \frac{ch^2}{12\mu} \qquad （粘性体） \tag{5·20a}$$

$$v_0 = \frac{ch^2}{12\mu}\left(1 - \frac{2K}{ch}\right)^2\left(1 + \frac{K}{ch}\right) \qquad （粘塑性体） \tag{5·20b}$$

若$K = 0$，方程（3·20b）回到了（5·20a）。对于$K \neq 0$则由式（5·20b）可见，粘塑性体的平均速度已不再象粘性体那样与压力梯度成比例。

下面讨论二维流动的情况。设$v_3 = 0$，则得到了平面流动，如果仍从式（5·10）出发，得到的是互相耦合的偏微分方程组，求解较困难。一个有趣的解法是首先象弹性力学平面问题那样引入应力函数$\phi(x, y)$，使得

$$\sigma_x = 2\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = 2\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -2\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} \tag{5·21}$$

这样平衡微分方程将自动满足；再象流体力学中那样引入流函数$\psi(x, y)$，使得

$$v_x = -\partial\psi/\partial y \qquad v_y = \partial\psi/\partial x \tag{5·22}$$

这样连续方程也可自动满足。再利用本构关系式(5·7)可得函数ϕ和ψ的两个非线性的二阶微分方程组。消去其中的一个函数，就可得到函数ψ(或ϕ)的一个非线性的四阶微分方程式。Il'yushin, A. A. 和 Ishlinskii, A. Yu. 曾用这种方程解决过一系列粘塑性流动的问题，有兴趣的读者请参见[15]和[16]所推荐的著作。

习　题

5·1　对非线性各向同性弹性材料，下面所列写于笛卡尔坐标系中的本构方程，有哪些从张量观点看是合适的？

(1) $\sigma_{ij} = P(e_{mn})e_{ij}$，式中 $P(e_{mn}) = ae_{11} + be_{11}^2$；

(2) $\sigma_{ij} = Q(I_1, I_2, I_3)e_{ij}$，式中 I_1、I_2、I_3 为 e_{ij}的第一、第二、第三不变量；

(3) $\sigma_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta e_{ij} + \gamma e_{ik}e_{kj} + \lambda e_{ik}e_{km}e_{mj}$，式中$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\lambda$ 为常数；

(4) 若α、β、γ、λ是应力分量的函数，问α、β、γ、λ应为应力分量怎样组合的函数才是允许的。

5·2　考虑各向同性不可压缩非线性弹性材料，令e'_{ij}和σ'_{ij}分别表应变偏量和应力偏量，若材料为线弹性的，则$e'_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma'_{ij}$，或用矩阵写为$\mathbf{e}' = \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\sigma}'$。将此推广于非线性弹性材料，设$\mathbf{e}'$可表为$\boldsymbol{\sigma}'$的幂级数：

$$\mathbf{e}' = \mathbf{c}_1\boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{c}_2\boldsymbol{\sigma}'^2 + \mathbf{c}_3\boldsymbol{\sigma}'^3 + \cdots$$

试用 Cayley-Hamilton 定理证明，此形式的最一般的非线性弹性规律可简化为如下形式：

$$\mathbf{e} = \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}'^2$$

5·3　将线弹性体的本构方程写为$\sigma_i = c_{ij}\varepsilon_j$，应变能式子写成$W = \frac{1}{2}c_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$，$c_{ij} = c_{ji}$，$i, j = 1, 2, \cdots, 6$。式中$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = \varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = \varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = \varepsilon_{12}$，对应地，$\sigma_1 = \sigma_{11}$，……，$\sigma_6 = \sigma_{12}$。试证，对正交各向异性材料，其弹性矩阵为

$$\mathbf{c} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & & 0 & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & & & \\ & & & c_{44} & & \\ & 0 & & & c_{55} & \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \tag{a}$$

提示：若变形对某平面对称时，应力对该面也对称，则说弹性介质的弹性性质对该面具有对称性，该面称为弹性对称面。正交各向异性材料有三个正交的弹性对称面。设取这三个对称面为笛卡尔坐标面。相对于x_2x_3坐标面来说，变形$\boldsymbol{\varepsilon}$的象为$\mathbf{R}_1\boldsymbol{\varepsilon}$，而应力$\boldsymbol{\sigma}$的象为$\mathbf{R}_1\boldsymbol{\sigma}$，由本构方程得$\mathbf{R}_1\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\mathbf{R}_1\boldsymbol{\varepsilon}$，式中

$$
\mathbf{R}_1=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&0&\\&&1&&&\\&&&1&&\\&0&&&-1&\\&&&&&-1\end{pmatrix}\quad
\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\\\varepsilon_6\end{Bmatrix}\quad
\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_4\\\sigma_5\\\sigma_6\end{Bmatrix}\qquad (b)
$$

将$\mathbf{R}_1\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{c}\mathbf{R}_1\boldsymbol{\varepsilon}$两边左乘$\mathbf{R}_1$，得$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{R}_1\mathbf{c}\mathbf{R}_1\boldsymbol{\varepsilon}$，同$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon}$比较即得 $\mathbf{c}=\mathbf{R}_1\mathbf{c}\mathbf{R}_1$，由此得$c_{15}=c_{16}=c_{25}=c_{26}=c_{35}=c_{36}=c_{45}=c_{46}=0$。同样，相对于坐标面$x_1x_3$来说，应变$\boldsymbol{\varepsilon}$的象为$\mathbf{R}_2\boldsymbol{\varepsilon}$，应力$\boldsymbol{\sigma}$的象为$\mathbf{R}_2\boldsymbol{\sigma}$。由此，$\mathbf{R}_2\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{c}\mathbf{R}_2\boldsymbol{\varepsilon}$，同样推得$\mathbf{c}=\mathbf{R}_2\mathbf{c}\mathbf{R}_2$，式中：

$$
\mathbf{R}_2=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&0&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&0&&&1&\\&&&&&-1\end{pmatrix}\qquad (c)
$$

由此又得$c_{14}=c_{24}=c_{34}=c_{56}=0$，再由弹性性质相对于坐标面$x_1x_2$的对称性又得 $\mathbf{c}=\mathbf{R}_3\mathbf{c}\mathbf{R}_3$，此不再增加为零的弹性系数的个数。最后得独立的非零弹性常数的个数为9，如(a)式所示。

5·4 试将应变能密度$W=\dfrac{\lambda}{2}\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}+\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$用应变张量的不变量表示。

5·5 长L、半径为a的实心圆轴受到作用于两端的扭转力偶M的扭转时，非零的应力分量为$\sigma_{13}=-\mu\alpha x_2$，$\sigma_{23}=\mu\alpha x_1$，其中$\alpha$为单位长度之扭转角。试计算其总应变能$U$。

5·6 试证，在体力f_i和面力T_i作用下处于平衡的线弹性体之总应变能等于外力在相应位移上所作之功之半，即有$U=\int_V WdV=\dfrac{1}{2}\left(\int_V\rho f_iu_idV+\int_S T_iu_ids\right)$，式中$W=\dfrac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}$。

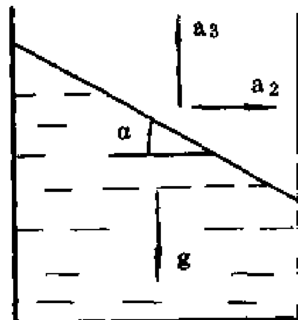
提示：$\int_S T_iu_ids=\int_S\sigma_{ji}u_in_jds=\int_V(\sigma_{ij,j}u_i+\sigma_{ij}u_{i,j})dV$。

5·7 设不可压无旋流动具有速度势ϕ，因此$\mathbf{v}=\mathrm{grad}\phi$。设介质的本构方程为$\sigma_{ij}=2\mu V_{ij}$，试将应力功率（耗散函数）$\sigma_{ij}V_{ij}$用$\phi$表出。

5·8 设不可压缩介质具有本构方程$\sigma_{ij}=-p\sigma_{ij}+\beta V_{ij}+\alpha V_{ik}V_{kj}$。试证，正应力之和$\sigma_{ii}=3(-p-2\alpha J_{(2)}/3)$。式中$J_{(2)}$为$V_{ij}$的第二不变量。

5·9 盛不可压缩流体的大容器以加速度 $\mathbf{a}=a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3$在重力场中运动，重力场平行于$x_3$轴方向。试决定自由表面的斜率。

提示：运动方程为：$p_{,i}=\rho f_i-\rho a_i$，积分求得$p=p(x_2,x_3,t)$，自由表面，$p=$常数，斜角α之正切$\mathrm{tg}\alpha=-dx_3/dx_2$。



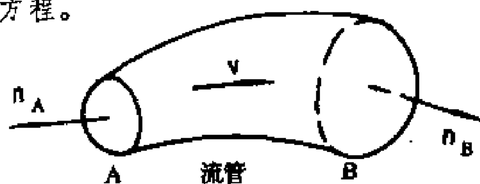
题5·9图　容器作等加速运动时的液面

5·10 若流体非常缓慢地流动，则速度的高阶项（如乘积项）可以忽略，其极限情况是蠕变流动。对此情形，试指出，无体力下稳定不可压流动的压力为调和函数，即$\nabla^2 p=0$。

提示：不可压缩流动的 Navier-Stokes 方程为

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j v_{i,j}\right)=\rho f_i-p_{,i}+\mu v_{i,jj}。$$

5·11 试求无粘性不可压流体流经流管时一维连续方程。



题5·11图 流管

提示：对不可压稳定流动，连续性方程简为$\int_V v_{i,i}dV=0$，由 Gauss 定理，此式化为$\int_S v_i n_i ds=0$，取截面A和B垂直于流速方向，其外法线单位矢量为$\mathbf{n}_A$和$\mathbf{n}_B$，并设$\mathbf{v}$沿截面均布，注意到侧面上$\mathbf{v}\perp\mathbf{n}$，$A$截面上$\mathbf{v}$与$\mathbf{n}_A$反向，$B$截面上$\mathbf{v}$与$\mathbf{n}_B$同向，即可得$v_A s_A-v_B s_B=0$。

5·12 当粘性流体的流动非常缓慢时，对时间求导数的项如ρ的物质导数、加速度项可以忽略，在忽略体力下，速度$\mathbf{v}$和压力p满足：

连续方程：$\mathrm{div}\mathbf{v}=0$ 或 $v_{i,i}=0$ （d）

运动方程：$-\mathrm{grad}p+\mu\nabla^2\mathbf{v}=0$ 或 $-p_{,i}+\mu v_{i,kk}=0$ （e）

对平面二维流动，$v_1=v_1(x_1,x_2)$，$v_2=v_2(x_1,x_2)$，$v_3=0$。若存在一函数$\psi(x_1,x_2)$使得

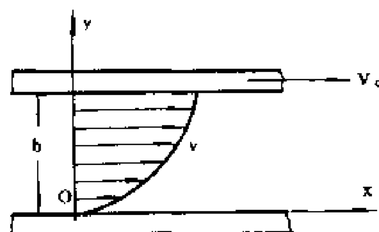
$$v_1=-\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\quad v_2=\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \qquad (f)$$

则（d）式满足，ψ称为流函数。试证明，此情形下，ψ满足

$$\nabla^2\nabla^2\psi=0 \qquad (g)$$

式中 $$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}。$$

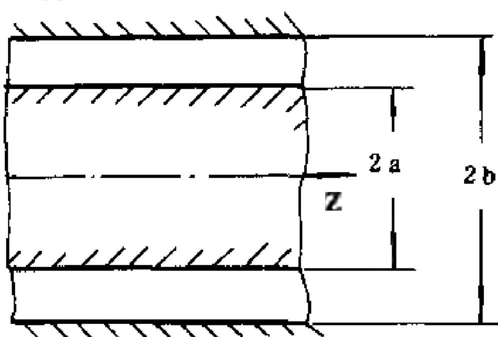
5·13 两块无限大相距为b的平行平板间有不可压粘性流体的层流流动。若上平板以速度V_c沿流动方向运动，已知压力梯度$\frac{\partial p}{\partial x}=$常数，不计体力，试证明，流体速度分布为



题5·13图 作相对运动的两平行板间的层流

$$v=\frac{V_c}{b}y-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(by-y^2) \qquad (h)$$

提示：控制方程为$\rho v_j v_{k,j}=-p_{,k}+\mu v_{k,jj}$，边界条件为$y=0, v=0$；$y=b$，$v=V_c$。



题5·14图 圆环形空腔管道中的流动

5·14 不可压缩粘性流体在均匀压力梯度$\frac{dp}{dz}=-m$下流过内、外半径为a和b的圆环形空腔管道。若速度场设为

$$v_x=v_y=0,\quad v_z=v_z(r) \qquad (j)$$

式中$r^2=x^2+y^2$。忽略体力，求v_z应满足的微分方程，并求其解。

5·15 不可压缩粘性流体(Stoks流体)

流经椭圆截面管道，其椭圆截面边界方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。$$

若压力梯度为$\frac{dp}{dz}=-m$，并设速度场$v_x=v_y=0$，$v_z=v_z(x,y)$，且在边界上$v_z=0$，试求该问题的解。

提示：可选$v_z=A\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$，它满足边界条件。将其代入偏微分方程$\nabla^2 v_z=-m/\mu$，可定出$A$值。

第六章　次弹性材料、经典弹性理论

Truesdell 提出弹性的三种定义，并分别命名为次弹性（Hypoelasticity）、弹性（Elasticity）和超弹性（Hyperelasticity）。对等温或绝热条件下的小变形线弹性体，这三种定义是等价的。但是当将它们推广到较一般的物质和变形范围时，它们就不再等价了，并得到了三种不同级别的普遍性。因此有分别讨论的必要。

第一种定义是基于 Cauchy 方法。它直接建立应力张量和应变张量间相互单值对应的关系。若材料具有均匀无应力的自然状态，且在此状态的有限邻域内存在Euler应力张量σ_{ij}和 Almansi 应变张量 e_{ij} 间的一一对应的关系，则称为弹性材料，其本构方程为

$$\sigma_{ij}=f(e_{ij})$$

这样，应力只和当前应变有关，而与应变史无关。这种定义法是经典弹性理论中最初采用的，下面我们将简称这种弹性本构关系为 Cauchy 弹性。这一理论提出的最简单的关系式，就是各向同性材料的虎克定律（5;2·10）。

第二种定义则从材料具有储能函数出发。若材料具有作为应变张量解析函数的应变能函数，且应变能函数的变化率等于应力所做之功率，则称为超弹性材料。在§5·2中，我们已经看到以这种方法来定义的线弹性材料，并且得到和第一种定义法相同的结果。对超弹性材料的详细讨论将在§7·4中进行。

第三种定义是建立率形式的本构关系。若材料应力率分量为形变率分量的齐次线性函数，则称为次弹性材料。这是本章将要讨论的内容。

本章中我们首先讨论次弹性材料的特征和本构方程，并由它推出经典弹性理论的线弹性规律，然后简单回顾经典弹性理论的基本方程和解法及经典弹性理论的普遍原理——能量原理。

§6·1　次弹性材料(Hypoelastic Material)、Euler 应力的 Jaumann 率

Ⅰ. Euler 应力的 Jaumann 率

为扩展弹性的定义，建立更一般的本构方程。本节将建立应力率与形变率间的线性关系，并将具有这种本构关系的材料称为次弹性材料（Hypoelastic Materials）。

但是，取什么作为应力率的定义呢？我们知道，当物体作刚体转动时，形变率张量V_{ij}为零，但应力的物质导数$D\sigma_{ij}/Dt$却不是这样。以一受拉伸直杆绕 z 轴转动为例，在某瞬时，杆轴平行于 x 轴，此时$\sigma_x\neq 0$，$\sigma_y=0$，但在另一瞬时，当杆转到其轴线平行于 y 轴时，则$\sigma_x=0$，$\sigma_y\neq 0$。这样，从固结于物体的物质坐标架上看，杆件中的应力状态没有变化，但从空间固定参考坐标系来看，应力分量在发生变化，因而应力分量的物质导数$D\sigma_{ij}/Dt$也在变化。

由此看来，应取跟随物体一起作刚体转动的物质坐标系 $ox'y'z'$ 上观察到的应力分量 $\sigma'_{ij}(t)$ 对时间的导数 σ^{∇}_{ij} 作为应力率才是合适的。此应力率的定义是Jaumann 1911年提出的

$$\sigma^{\nabla}_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\sigma'_{ij}(t+\Delta t)-\sigma'_{ij}(t)] \quad (1\cdot1)$$

物质坐标架 $ox'y'z'$ 上的应力分量可用固定参考坐标架 $oxyz$ 上的应力分量表出。利用应力张量坐标变换规律，有

$$\sigma'_{ij}=\sigma_{kl}n_{ik}n_{jl} \quad (1\cdot2a)$$

这里 $n_{ik}=\cos(x'_i,\ x_k)$ 为物质坐标架与空间坐标架坐标轴间夹角的方向余弦。

现求此方向余弦。注意到平移并不影响应力率，因而只需考虑转动。为此，取物体中任一质点 p，并以 p 作为两坐标架的公共原点，且在 t 瞬时，两坐标架重合。参考坐标架 x_i 不动，物质坐标架 x'_i 随 p 点邻域一起以角速度 ω 转动。在转动时，p 点邻域内的一质点Q的物质坐标 dx'_i 不变，而Q质点的空间坐标 dx_i 则发生变化。由（图6·1）可得

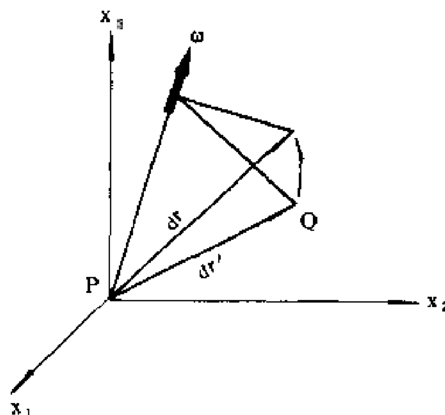


图6·1　p点邻域的旋转

$$d\mathbf{r}'=d\mathbf{r}-\boldsymbol{\omega}dt\times d\mathbf{r}$$

或

$$dx'_i=dx_i-e_{ijk}\omega_j dt dx_k$$
$$=(\delta_{ik}-e_{ijk}\omega_j dt)dx_k$$

由此得

$$n_{ik}=\delta_{ik}-e_{ijk}\omega_j dt \quad (1\cdot2b)$$

在 $t+dt$ 瞬时，质点 p 在参考系 x_i 中的应力分量为

$$\sigma_{ij}(t+dt)=\sigma_{ij}(t)+\frac{D\sigma_{ij}}{Dt}dt$$

根据（1·2a）式，我们有

$$\sigma'_{ij}(t+dt)=n_{ik}n_{jl}\sigma_{kl}(t+dt)$$
$$=(\delta_{ik}-e_{imk}\omega_m dt)(\delta_{jl}-e_{jnl}\omega_n dt)\left(\sigma_{kl}+\frac{D\sigma_{kl}}{Dt}dt\right)$$
$$=\sigma_{ij}(t)+\left(\frac{D\sigma_{ij}}{Dt}-e_{imk}\omega_m\sigma_{kj}-e_{jnl}\omega_n\sigma_{il}\right)dt+O(dt^2)$$

将上式代入（1·1），并注意到 $\sigma_{ij}(t)=\sigma_{ji}(t)$，即得

$$\sigma^{\nabla}_{ij}=\frac{D\sigma_{ij}}{Dt}-e_{ipk}\omega_p\sigma_{kj}-e_{jql}\omega_q\sigma_{il}$$
$$=\frac{D\sigma_{ij}}{Dt}-W_{ik}\sigma_{kj}-W_{jl}\sigma_{il} \quad (1\cdot3a)$$

或

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T \quad (1\cdot3b)$$

此即 Jaumann 应力率的表达式，它为二阶对称张量。

对应力率的要求是：它必须是关于刚体转动的不变量。但是，此一要求并没有唯一的解答。例如 Truesdell 给出了下列的应力率

$$^{(T)}\sigma_{ij}^{\nabla} = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} + \sigma_{ij}v_{p,p} - \sigma_{ip}v_{j,p} - \sigma_{jp}v_{i,p} \tag{a}$$

忆及式（3:2·2）、（3:2·3），我们有

$$v_{p,p} = V_{pp}, \quad v_{j,p} = V_{jp} + W_{jp}$$

将上两式代入式(a)，并注意到式（1·3)，我们得到

$$^{(T)}\sigma_{ij}^{\nabla} - \sigma_{ij}^{\nabla} = \sigma_{ij}V_{pp} - \sigma_{ip}V_{jp} - \sigma_{jp}V_{ip} \tag{b}$$

当质点 p 邻域只作刚体运动时，$V_{pp} = V_{ip} = 0$，这样$^{(T)}\sigma_{ij}^{\nabla}$就简化为$\sigma_{ij}^{\nabla}$，由于$\sigma_{ij}^{\nabla}$不受刚体转动的影响，故$^{(T)}\sigma_{ij}^{\nabla}$也不受刚体转动的影响，实际上式（$b$）给出的$^{(T)}\sigma_{ij}^{\nabla}$与$\sigma_{ij}^{\nabla}$之差反映了质点邻域变形速率的影响。

以后我们将采用 Jaumann 应力率，因为它直接由跟随质点邻域作瞬时转动的物质坐标架上观察到的应力分量对时间的变化率来定义的，其力学意义比较明确。Jaumann 率还有另一个优点，令A_{pq}与B_{pq}为定义于质点 p 的二阶对称张量，而A_{pq}^{∇}与B_{pq}^{∇}为其Jaumann率，则有下述运算规则（注：对其它应力率则不一定存在）

$$(A_{pq}B_{pq})^{\cdot} = \frac{D}{Dt}(A_{pq}B_{pq})$$

$$= A_{pq}^{\nabla}B_{pq} + A_{pq}B_{pq}^{\nabla}. \tag{c}$$

证明：

$$\frac{D}{Dt}(A_{pq}B_{pq}) = \frac{DA_{pq}}{Dt}B_{pq} + A_{pq}\frac{DB_{pq}}{Dt} \tag{d}$$

参照式（1·3)，我们有

$$\frac{DA_{pq}}{Dt} = A_{pq}^{\nabla} + W_{pk}A_{kq} + W_{qk}A_{kp}$$

$$\frac{DB_{pq}}{Dt} = B_{pq}^{\nabla} + W_{pk}B_{kq} + W_{qk}B_{kp}$$

将上两式代入（d）式得

$$\frac{D}{Dt}(A_{pq}B_{pq}) = A_{pq}B_{pq}^{\nabla} + B_{pq}A_{pq}^{\nabla} + W_{pk}B_{kq}A_{pq} + W_{qk}B_{kp}A_{pq}$$

$$+ W_{pk}A_{kq}B_{pq} + W_{qk}A_{kp}B_{pq} \tag{e}$$

上式右端第四和第六项重复指标作如下置换：$p \to q \to k \to p$，则得

$$\frac{D}{Dt}(A_{pq}B_{pq}) = A_{pq}B_{pq}^{\nabla} + B_{pq}A_{pq}^{\nabla} + W_{pk}B_{kq}A_{pq} + W_{kp}B_{pq}A_{qk}$$

$$+ W_{pk}A_{kq}B_{pq} + W_{kp}A_{pq}B_{qk}$$

$$= A_{pq}B^{\triangledown}_{pq} + B_{pq}A^{\triangledown}_{pq} + A_{pq}B_{qh}(W_{ph} + W_{hp})$$

$$+ B_{pq}A_{qh}(W_{ph} + W_{hp})$$

由于涡旋张量W_{ph}为反对称张量，故上式园括号中之值为零，于是(c)式得证。

Ⅱ．次弹性材料的本构方程

某些材料如土壤等其弹性性质与应力加载路径有关，例如沙土剪应力与剪应变间的关系曲线受围压的影响很大（围压改变了砂土的密实度，造成了砂粒分布与摩擦力的改变），因而如果起点与终点的剪应力与围压应力一样而加载次序不同，即使在剪应力与剪应变关系曲线的弹性阶段其应变值也是不同的。正是由于这种路径相关性，这类材料的应力应变关系已不能写成全量形式，而必须写成增量形式或率的形式，即

$$\sigma^{\triangledown}_{ij} = f_{ij}(V_{kl}) \tag{1·4a}$$

为了使上述本构关系中的材料常数不含牛顿时间，由因次分析可知，$f_{ij}(V_{kl})$应写成V_{kl}的齐次线性形式，因此有

$$\sigma^{\triangledown}_{ij} = c_{ijkl}V_{kl} \tag{1·4b}$$

具有这类形式本构关系的材料称之为次弹性材料。其中c_{ijkl}依赖于瞬时应力张量或瞬时应变张量，由张量商律可知，它为四阶张量，且由应力率和形变率的对称性可得

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} \tag{1·5}$$

现分析次弹性材料的一些特性，设σ_{ij}表示次弹性材料内任一点p处在t瞬时的应力状态，并设经历时间间隔dt后在p点邻域得到无限小位移$du_i(x_j)$。设$v_i(x_j)$为相应的速度场，则$du_i = v_i dt$。由于位移无限小，故有

$$\left.\begin{aligned} V_{ij}dt &= \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}) \qquad (\text{无限小变形}) \\ W_{ij}dt &= \frac{1}{2}(du_{i,j} - du_{j,i}) \qquad (\text{无限小转动}) \end{aligned}\right\} \tag{1·6}$$

考虑应力在此无限小时间间隔dt中的变化$d\sigma_{ij}$，利用式（1·3a）和（1·4b)我们有

$$d\sigma_{ij} = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt}dt = (c_{ijkl}V_{kl} + W_{ik}\sigma_{kj} + W_{jk}\sigma_{ki})dt$$

$$= \frac{1}{2}c_{ijkl}(\sigma_{pq})(du_{k,l} + du_{l,k}) + \frac{\sigma_{kj}}{2}(du_{i,k} - du_{k,i})$$

$$+ \frac{\sigma_{ki}}{2}(du_{j,k} - du_{k,j}) \tag{1·7a}$$

式中σ_{ij}为此一时间间隔初始时之应力。可见应力的变化仅取决于无限小转动与变形，而与转动和变形的速度无关。因此次弹性材料是非粘性的。如前所述，在弹性常数中不含时间，则由式（1·7a）可见在增量本构关系式中不含时间的影响。

现若令p点由$(\sigma_{ij},\ u_i)$状态经式(1·6)所示的无限小位移du_i到达另一状态$(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij},\ u_i + du_i)$后再逆程返回，也即使其经相反的位移$(-du_i)$回到其起始位置和形状，则按式(1·7a)，

位移返回时其应力的改变为

$$d\sigma'_{ij} = -\frac{1}{2}c_{ijkl}(\sigma_{pq}+d\sigma_{pq})(du_{k,l}+du_{l,k})$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{kj}+d\sigma_{kj})(du_{i,k}-du_{k,i})$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{ki}+d\sigma_{ki})(du_{j,k}-du_{k,j}) \tag{1·7b}$$

这里我们假定c_{ijkl}为瞬时应力状态的函数。对$c_{ijkl}(\sigma_{pq}+d\sigma_{pq})$作Talar展开并略去二阶小量

$$c_{ijkl}(\sigma_{pq}+d\sigma_{pq}) = c_{ijkl}(\sigma_{pq}) + \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial \sigma_{pq}}d\sigma_{pq}$$

并代回(1·7b)式可得

$$d\sigma'_{ij} + d\sigma_{ij} \sim O(d\sigma_{pq}du_{k,l})$$

即返回的应力与原应力之差只是二阶小量，若忽略二阶小量，则可认为应力恢复到其初始值。因此次弹性材料在无限小位移下是可逆的。

由于次弹性材料对无限小位移的无粘性及可逆性和对有限变形的路径相关性，故采用了“次弹性”这一术语。

我们强调次弹性材料的应力响应不仅取决于当前应变，还与变形路径有关，这与弹性材料的应力响应只取决于当前应变状态的情况不同，但是如下节将看到的，弹性材料可看成是次弹性材料的一个特例，因而次弹性材料比起弹性材料具有更广泛的普遍性。

考虑几种次弹性材料。先考虑c_{ijkl}与应力状态无关的次弹性材料。设材料是各向同性的，即坐标变换时本构关系的函数形式与物性常数保持不变，于是由（1·3）可见c_{ijkl}在任意取向的笛卡尔坐标系中应相同，即c_{ijkl}为四阶各向同性张量，采用同推导（5:2·10）式相似的步骤，可得：

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \lambda V_{kk}\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \tag{1·8}$$

其次考虑c_{ijkl}是应力分量的线性函数的初始各向同性次弹性材料。为满足式（1·5）指出的对称性的要求，直接验证就可判断张量c_{ijkl}应是下面五个张量的线性组合：

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{ij}\delta_{kl},\ \ \delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk},\ \ \delta_{ij}\sigma_{kl},\\ \delta_{ik}\sigma_{jl}+\delta_{il}\sigma_{jk}+\delta_{lk}\sigma_{il}+\delta_{jl}\sigma_{ik},\ \ \sigma_{ij}\delta_{kl}\end{array}\right\} \tag{1·9a}$$

其中头两个张量的系数是应力张量迹$t_r\sigma(=\sigma_{nn})$的线性函数，而后三个张量的系数应为常数。由此这类次弹性材料的最一般的c_{ijkl}的形式可写为：

$$c_{ijkl} = (a_{01}+a_{11}\sigma_{nn})\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(a_{02}+a_{12}\sigma_{nn})(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{jk}\delta_{il})$$

$$+a_{13}\sigma_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}a_{14}(\delta_{ik}\sigma_{jl}+\delta_{il}\sigma_{jk}+\delta_{lk}\sigma_{il}+\delta_{jl}\sigma_{ik})$$

$$+a_{15}\sigma_{kl}\delta_{ij} \tag{1·9b}$$

将上式代入式（1·4b），得下列形式的本构方程：

$$\sigma_{ij}^{\triangledown}=a_{01}V_{nn}\delta_{ij}+a_{02}V_{ij}+a_{11}\sigma_{nn}V_{mm}\delta_{ij}+a_{12}\sigma_{nn}V_{ij}$$

$$+a_{13}\sigma_{ij}V_{nn}+a_{14}(\sigma_{jk}V_{ik}+\sigma_{ik}V_{jk})+a_{15}\sigma_{kl}V_{kl}\delta_{ij} \qquad (1\cdot10)$$

式中系数a_{01}，…，a_{15}为材料常数，而σ_{ij}为瞬时应力。具有式（1·10）表达的本构方程的材料常称为一阶（或线性）次弹性材料，它比较适合于描述土壤、混凝土等一类材料的力学响应特性。式(1·10)右边最后三项显示出应力引起的各项异性。

更一般的情况，张量c_{ijkl}将包含应力张量的二次项。应力张量的高次项不需要，因为根据 Cayley-Hamilton 定理，它们可用应力张量的一次、二次项与常数项的线性组合来表示。

在位移很小，且转动和应变相比为同阶或更高阶小量的情况下，$V_{ij}\simeq\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\sigma_{ij}^{\triangledown}\simeq\dot{\sigma}_{ij}$，则次弹性材料的本构方程简化为

$$\dot{\sigma}_{ij}=c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \qquad (1\cdot11)$$

其中我们仍设c_{ijkl}为瞬时应力的函数。写成增量形式为

$$d\sigma_{ij}=c_{ijkl}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{kl} \qquad (1\cdot12)$$

Ⅲ. 失稳条件

由上式不难证明存在某种应力状态，在此应力状态下应变状态的改变并不引起应力状态的改变。此临界应力状态由式（1·12）右边系数行列式等于零得到，即

$$|c_{ijkl}(\sigma_{mn})|=0 \qquad (1\cdot13)$$

式（1·13）可看成是失稳破坏的条件[56]。

现仍以上述一阶次弹性材料为例，为了简化，取坐标轴沿该瞬时三个主应力方向，并将式（1·12）改写成矢量形式：

$$\{d\sigma\}=[c]\{d\varepsilon\} \qquad (1\cdot14)$$

其中

$$\{d\sigma\}=[d\sigma_x,\ d\sigma_y,\ d\sigma_z,\ d\tau_{xy},\ d\tau_{yz},\ d\tau_{zx}]^T$$
$$\{d\varepsilon\}=[d\varepsilon_x,\ d\varepsilon_y,\ d\varepsilon_z,\ d\gamma_{xy},\ d\gamma_{yz},\ d\gamma_{zx}]^T \qquad (1\cdot15)$$

γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx}为工程剪应变。

$$[c]=\begin{pmatrix} c_1 & c_{12} & c_{13} & & & \\ c_{21} & c_2 & c_{23} & & 0 & \\ c_{31} & c_{32} & c_3 & & & \\ & & & c_4 & & \\ & 0 & & & c_5 & \\ & & & & & c_6 \end{pmatrix} \qquad (1\cdot16)$$

失稳破坏条件（1·13）写为

$$\det[c]=0 \qquad (1\cdot17)$$

其中

$$c_i=a_{01}+a_{02}+(a_{11}+a_{12})I_1+(a_{13}+2a_{14}+a_{15})\sigma_i, \qquad i=1,2,3$$
$$c_{ij}=a_{01}+a_{11}I_1+a_{13}\sigma_i+a_{15}\sigma_j, \qquad i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ 3$$

$$c_4 = \frac{1}{2}[a_{02} + (a_{12} + a_{14})I_1 - a_{14}\sigma_3] \tag{1·18}$$

$$c_5 = \frac{1}{2}[a_{02} + (a_{12} + a_{14})I_1 - a_{14}\sigma_1]$$

$$c_6 = \frac{1}{2}[a_{02} + (a_{12} + a_{14})I_1 - a_{14}\sigma_2]$$

式中 $I_1 = \sigma_{kk}$，σ_i 为主应力。将（1·17）式展开得

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_2 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_3 \end{vmatrix} c_4 c_5 c_6 = 0 \tag{1·19}$$

失稳破坏条件（1·19）式可解释为主应力空间的曲面，其中包含两个曲面，其一由 $c_4c_5c_6 = 0$ 得到，它为三角锥体的锥面，第二个由式（1·19）左边三阶行列式为零得到；此为主应力空间的曲面。由于这两个曲面可能有互相交割，因此次弹性材料的稳定区域应取由这些曲面在主应力空间包住原点的最小区域。上述讨论对工程类岩土材料和混凝土的失稳破坏分析有着一定意义。

§6·2 次弹性转化为 Cauchy 弹性的条件

我们仍限于讨论小位移，转动较之应变为同阶或更高阶小量情况。若次弹性材料的增量型本构方程（1·12）式的系数间对所有应力状态满足：

$$\frac{\partial c_{ijkl}}{\partial \varepsilon_{pq}} = \frac{\partial c_{ijpq}}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{2·1a}$$

或

$$\frac{\partial c_{ijkl}}{\partial \sigma_{rs}} \cdot \frac{\partial \sigma_{rs}}{\partial \varepsilon_{pq}} = \frac{\partial c_{ijpq}}{\partial \sigma_{mn}} \cdot \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{2·1b}$$

则式（1·12）可积，且积分结果与积分路径（即应变路径）无关，由此得全量的应力和应变本构关系，而次弹性就转化为 Cauchy 弹性。这时应力仅取决于当前的应变状态而与应变历史无关。设物体存在自然状态，即应力为零时应变为零，对式（1·12）从自然状态开始积分，并注意到条件（2·1)式，可得：

$$\sigma_{ij} = \int_0^{\varepsilon_{mn}} c_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = f_{ij}(\varepsilon_{mn}) \tag{2·1c}$$

此即 Cauchy 弹性的本构方程。若 $f_{ij}(\varepsilon_{mn})$有二阶连续偏导数，且满足：

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{2·2a}$$

或

$$c_{ijkl} = c_{klij} \tag{2·2b}$$

则 $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = f_{ij} d\varepsilon_{ij}$ 为某函数W的全微分，即

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{2·2c}$$

由此

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{2·2d}$$

即应力有势，而$W(\varepsilon_{mn})$即为应力势函数，也即应变能密度函数。于是，在条件（2·2a）式下，Cauchy 弹性转化为超弹性。由此可见，Cauchy 弹性包含了超弹性，而次弹性包含了Cauchy 弹性。因此，三种弹性定义中，次弹性具有最广泛的普遍性。

现以一阶次弹性材料为例。要使这种材料成为 Cauchy 弹性的，按照条件（2·1b）式，它必须同时满足下列各式：

$$\left.\begin{aligned}&a_{14}=0\\&a_{12}(3a_{11}+a_{12})=0\\&a_{12}\,a_{15}=0\\&a_{15}(3a_{11}+a_{15})=0\\&3a_{01}a_{12}+a_{02}(a_{12}-a_{13})=0\end{aligned}\right\}\tag{2·3a}$$

而若要使这种材料是超弹性的，按条件（2·2b）式，它还必须满足

$$a_{13}=a_{15}\tag{2·3b}$$

若一阶次弹性材料的各材料常数a_{01}至a_{15}不满足条件（2·3a）式和（2·3b）式，则由本构方程（1·12）式描述的一阶次弹性材料（其中c_{ijkl}由式（1·9b）给出）的行为一般是路径相关的。

若除a_{01}和a_{02}外，其余a_{11}至a_{15}各材料常数为零，则条件（2·3a）和（2·3b）显然满足。令$a_{01}=\lambda$，$a_{02}=2\mu$，我们就得到各向同性线弹性材料的广义虎克定律：

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}\tag{2·4}$$

对各向异性次弹性材料，当c_{ijkl}为常数时，条件(2·1a)自然满足，则由式（1·12）积分得各向异性线弹性本构方程

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}。\tag{2·5}$$

§6·3　弹性力学的基本方程、波动方程

线弹性固体的本构方程已在§5·2中给出。本节讨论无限小位移下各向同性线弹性固体的控制方程及其解法。

Ⅰ．基本方程

考虑处于等温或绝热状态的各向同性弹性固体，设其存在唯一的自然状态，在该状态下，所有的位移、应变、应力及应变能函数之值均为零。

限于讨论小位移和小速度及位移梯度$\partial u_i/\partial x_j$为小量的情况。此情形下的应变和速度、加速度公式都可线性化

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\tag{3·1}$$

$$\simeq\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\varepsilon_{ij}$$

$$v_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\simeq\frac{\partial u_i}{\partial t}\tag{3·2}$$

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \simeq \frac{\partial v_i}{\partial t} \simeq \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3\cdot3)$$

且物质描述与空间描述已没有区别。

为求线弹性体在给定外力和边界条件及初始条件下的位移场和应力场，必须从描述线弹性体运动和力学规律的基本方程出发，这些方程可分为三组。

1. 几何和运动学方程，即（3·1）—（3·3）式。

2. 运动方程 $\sigma_{ji,j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ （3·4a）

或平衡方程 $\sigma_{ji,j} + \rho f_i = 0$ （3·4b）

3. 本构方程 $\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$ （3·5）

不考虑面矩，应力张量是对称的，$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$，小变形情况下，密度视为常数，于是式（3·1）、（3·4）、（3·5）十五个方程包含十五个未知函数：三个位移分量，六个应变分量和六个应力分量，因此解弹性力学问题的方程数目足够。

Ⅱ. 边界条件和初始条件

为了求得问题的解答,除体力外，必须给定边界条件和初始条件。边界条件有三种给法：

（1）第一类边界条件。整个表面给定外力，边界条件可写为：

$$\overline{T}_i = \sigma_{ij} n_j \qquad i = 1, 2, 3 \quad (3\cdot6)$$

这里n_j为表面外法线方向余弦，$\overline{T}_i$为已知面力。

（2）第二类边界条件。整个表面给定位移，边界条件为：

$$u_i = \overline{u}_i \qquad i = 1, 2, 3 \quad (3\cdot7)$$

$\overline{u}_i$为已知位移。

（3）混合边界条件。更多的问题是在部分表面s_σ上给定面力边界条件，而在其余边界表面$s_u = s - s_\sigma$上给定位移边界条件。有时在某些表面或表面点处给定混合边界条件，即在每一点处给定的三个分量边界条件中，两个（或一个）为面力分量边界条件，而一个（或两个）为位移边界条件。

对于弹性动力学问题，除边界条件外，还必须给定初始条件，即 $t = 0$时，给定

$$u_i = f_i(x_j) \qquad i = 1, 2, 3 \quad (3\cdot8a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = g_i(x_j) \qquad i = 1, 2, 3 \quad (3.8b)$$

式中 f_i 和 g_i 为已知函数。

Ⅲ. 弹性力学问题解的唯一性

现在提出下述问题，即弹性力学问题的解是否总是存在，且是否唯一的？

解的存在性的证明已超出本书的范围，但是应指出的是只有边界条件满足一定条件时解才存在，例如在第一类边界条件的弹性静平衡问题中所给的面力边界条件必须满足整体平衡条件，即

$$
\begin{aligned}
&\int_S \mathbf{T} ds + \int_V \rho \mathbf{f} dV = 0 \\
&\int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{T}) ds + \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{f}) dV = 0
\end{aligned}
\tag{3·9}
$$

又如柱杆扭转问题归结为解 Laplace 方程的下述 Neumann 问题：

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2 \phi = 0 \qquad \text{在} V \text{(横截面)内} \\
&\frac{\partial \phi}{\partial n} = f(\mathrm{x}) \quad \text{在} s \text{(横截面周边)上}
\end{aligned}
\tag{3·10}
$$

则解存在的充要条件是给定边界值 f 应满足

$$
\int_S f ds = 0 \tag{3·11}
$$

至于解的唯一性，只有在小位移，因而基本方程线性化且存在着正定的应变能函数时才有唯一解。在有限变形即几何非线性情况下，基本方程将是非线性的，这时不存在解的唯一性。例如在大挠度和屈曲（稳定性）问题中即如此，在压杆稳定问题中，当轴向载荷 p 达到临界载荷 p_{cr} 时，将出现解的分叉，而当 $p > p_{cr}$ 时，除直线平衡形式（不稳定）外还将出现曲线平衡形式。

下面证明在小变形下，线弹性体的弹性静力学问题解的唯一性定理。

设弹性体具有正定的应变能函数，且受载前处于自然状态，则在给定边界条件下弹性体平衡问题的应力和应变解是唯一的。若为第一类边界条件，位移只决定到相差一个刚体位移的程度；若为第二类或混合边界条件，则位移解也是唯一的。

$$
\begin{aligned}
&\text{设在} s_u \text{上给定 } u_i = \overline{u}_i \qquad (i = 1,2,3) \\
&\text{而在} s_\sigma \text{上给定} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j = \overline{T}_i \qquad (i = 1,2,3)
\end{aligned}
\tag{3·12}
$$

且 $s_\sigma + s_u = s$，

证明解 σ_{ij}，ε_{ij} 是唯一的。

用反证法，设解不是唯一的，则存在两个应变和应力状态之解 ε'_{ij}、σ'_{ij} 和 ε''_{ij}、σ''_{ij}，且这两种解都满足边界条件（3·12），则两种解之差 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}$，$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$ 满足零位移和零面力的边界条件

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_i = 0, \qquad (\text{在} s_u \text{上}) \\
&\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j = 0 \quad (\text{在} s_\sigma \text{上})
\end{aligned}
\right\}
\tag{3·13}
$$

和零体力的平衡方程

$$
\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{,j} = 0 \qquad (\text{在} V \text{内}) \tag{3·14}
$$

由式（3·14）可得

$$
\int_V u_i \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{,j} dV = 0
$$

由分部积分上式可化为

$$\int_V u_i \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) n_j ds - \int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} u_{i,j} dV = 0$$

但由边界条件（3·13）可见，第一个面积分为零，由于应变分量的对称性，第二个积分可写为

$$\int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} dV = 0$$

由于W为应变的齐二次函数（见（5：2·5)式），故被积函数等于 $2W$，于是得

$$\int_V W dV = 0 \qquad (3 \cdot 15)$$

由于W为正定函数，则上式成立只有在W为零时才成立，而这要求所有应变分量ε_{ij}全为零。由此证得 $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon''_{ij}$和$\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}$，即应力和应变解是唯一的。

应提请注意的是，上述证明只是在加载前物体处于自然状态的情况下成立，若加载前物体已有初应力，则问题的解将是多值的。

当为第一类边界条件且未给物体任何位移约束时，位移解将是不定的，但任选的两个位移解之间只相差一个刚体位移。

Ⅳ. 弹性力学问题的解法

为了简化求解，可取某些未知量（应力或位移）为基本未知量，而从基本方程中消去其余未知量。根据取应力或是取位移为基本未知量， 可 把 解 法分为两类，应力解法和位移解法。

一、应力解法求解弹性力学平衡问题。如取应力为基本未知量，则它必须满足三个平衡方程（3·4b）。通过本构方程可由应力求得 6 个应变分量，如第三章所述，这些应变分量必须满足相容性条件（3：4·11）式

$$\varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{kj,il} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{il,kj} = 0 \qquad (a)$$

其中独立的只有 6 个。

利用本构关系

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\Theta\delta_{ij} \qquad (3 \cdot 16)$$

将相容方程用应力分量表示

$$\sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{kj,il} - \sigma_{il,kj}$$

$$= \frac{\nu}{1+\nu}(\Theta_{,kl}\delta_{ij} + \Theta_{,ij}\delta_{kl} - \Theta_{,il}\delta_{kj} - \Theta_{,kj}\delta_{il}) \qquad (b)$$

式中 $\Theta = \sigma_{kk}$为三个正应力之和。当令 $k = l$ 时得

$$\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} - \sigma_{kj,ik} - \sigma_{ik,kj} = \frac{\nu}{1+\nu}(\Theta_{,kk}\delta_{ij} + \Theta_{,ij}) \qquad (c)$$

（ c ）式为 9 个方程，由于应力的对称性，其中 6 个独立，故独立方程数未减。

由平衡方程可得

$$\sigma_{ik,kj} = -\rho f_{i,j}$$

将此代入（ c ）式，并注意到$\sigma_{ij,kk}=\nabla^2\sigma_{ij}$和$\sigma_{kk}=\Theta$得

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij}-\frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\nabla^2\Theta=-\rho(f_{i,j}+f_{j,i}) \qquad (d)$$

方程(d)可化为更简单的形式，为此对(d)式在$i=j$下缩并，提供一个建立$\nabla^2\Theta$与$\rho f_{i,i}$间的关系式

$$\frac{1-\nu}{1+\nu}\nabla^2\Theta=-\rho f_{i,i} \qquad (e)$$

将（ e ）代入（ d ）左边的第三项，即得熟知的 6 个 Beltrami-Michell 相容方程：

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij}=-\frac{\nu}{1-\nu}\rho f_{k,k}\delta_{ij}-\rho(f_{i,j}+f_{j,i}) \qquad (3\cdot17)$$

这样，用应力法求解时，六个应力分量须满足 3 个平衡方程(3·4b)和 6 个相容方程（3·17）及 3 个边界条件（3·6)。这看起来出现了矛盾，即方程多了而边界条件少了。但是注意到若相容方程（3·17）在V内成立时，可以证明($\sigma_{ik,k}+\rho f_i$)在V内满足Laplace方程，即($\sigma_{ik,k}+\rho f_i$)为V内的调和函数[53]。若一个调和函数在边界S上为零，则必在整个域V内为零，即只要平衡方程（3·4b）在边界S上满足，则必在整个域内被满足。于是用应力法求解弹性力学问题的提法可改为：求六个应力分量σ_{ij}，使其在域V内满足六个相容方程（3·17）并在边界S上满足六个边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij}n_j=\overline{T}_i,\\&\sigma_{ji,j}+\rho f_i=0\end{aligned}\right\}\quad \text{在} S \text{上} \qquad (f)$$

在无体力的情况下，平衡方程（3·4b）和相容方程（3·17）都是齐次的，问题的解法还可进一步简化。作为平面问题 Airy 应力函数解法的推广，在三维问题中我们也将应力分量用应力函数表示。Finzi 在1934年指出，平衡方程

$$\sigma_{ij,j}=0, \qquad \sigma_{ij}=\sigma_{ji} \qquad (3\cdot18)$$

的通解为

$$\sigma_{ij}=e_{imr}e_{jns}\phi_{rs,mn} \qquad (3\cdot19)$$

式中ϕ_{rs}为应力函数二阶对称张量的分量，适当选择ϕ_{rs}使应力分量满足齐次相容方程

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij}=0 \qquad (3\cdot20)$$

即得到无体力平衡问题的解。令$r\neq s$时，$\phi_{rs}=0$，就得 3 个Maxwell应力函数$\varphi_i=\phi_{ii}$(对 i 不求和），由其决定的应力分量为

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_2^2},\ \cdots,\ \sigma_{12}=-\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\partial x_2}。$$

若令 $r=s$ 时$\phi_{rs}=0$，则得 3 个Morera应力函数$\psi_1=-2\phi_{23}$、$\psi_2=-2\phi_{31}$和$\psi_3=-2\phi_{12}$，由其决定的应力分量为

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2\partial x_3},\ \cdots,\ \sigma_{12}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\right)。$$

若除ϕ_{33}外，取其余$\phi_{rs}=0$，就得平面应力问题的Airy应力函数$\varphi=\phi_{33}$，由其决定的应力分量为

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2},\ \sigma_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2},\ \sigma_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}。$$

由于位移边界条件不能用应力表出，故应力解法只适用于给出第一类边界条件的边值问题。

二、位移解法。取位移为基本未知量时，我们先利用本构方程（3·5）将运动方程中的应力用应变表示，再将所得方程的应变用位移表示，这样就得三个位移分量u_i的控制方程，称为 Navier 方程

$$\mu u_{i,jj}+(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\rho f_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\tag{3·21a}$$

写成矢量形式为

$$\mu\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\rho\mathbf{f}=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}。\tag{3·21b}$$

当用位移解法时，面力边界条件中的应力分量也应相应地用位移分量表示，由式(5：2·10)及式（3·6)可得用位移分量表示的面力边界条件：

$$\overline{T}_i=\lambda\varepsilon_{kk}n_i+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j。\tag{3·22}$$

解出基本未知量后，不难再求出余下的未知量。

V．波动方程

从（3·21）出发，我们将推出在无限大各向同性介质中存在两种类型的弹性波：膨胀波（体变波）和剪切波（畸变波）。

忽略体力，方程（3·21）简化为：

$$\mu\nabla^2 u_i+(\lambda+\mu)\theta_{,i}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\tag{3·23}$$

式中$\theta=\varepsilon_{kk}$为体积应变。上式对x_i求导得

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\theta=\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\tag{3·24a}$$

或
$$\nabla^2\theta=\frac{1}{c_L^2}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\tag{3·24b}$$

此为膨胀波的波动方程，它在介质中的传播速度为c_L

$$c_L=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\tag{3·25}$$

将式（3·23）对x_q求导，并乘以e_{pqi}得

$$\mu\nabla^2(e_{pqi}u_{i,q})+(\lambda+\mu)e_{pqi}\theta_{,iq}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e_{pqi}u_{i,q})$$

因e_{pqi}关于q、i为反对称，而$\theta_{,iq}$关于q、i为对称，故上式左边第二项为零。

再注意到$\frac{1}{2}e_{pqi}u_{i,q}=\Omega_p$为相对于$x_p$轴之旋转，则上式写为

$$\mu\nabla^2\Omega_p=\rho\frac{\partial^2\Omega_p}{\partial t^2}$$

或
$$\nabla^2\Omega_p=\frac{1}{c_T^2}\cdot\frac{\partial^2\Omega_p}{\partial t^2} \tag{3·26}$$

此为旋转的波动方程，其在介质中的传播速度c_T为

$$c_T=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{3·27}$$

如果体膨胀$\theta=0$，则方程（3·23）变为

$$\mu\nabla^2u_i=\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2} \tag{3·28}$$

因此，等体积波是以波速c_T传播。

如果旋转Ω_p为零，则位移有势φ，且

$$\left.\begin{aligned}u_i&=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\\ \theta&=u_{i,i}=\nabla^2\varphi\end{aligned}\right\} \tag{3·29}$$

代入式（3·23）得

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2u_i=\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2} \tag{3·30}$$

即无旋波是以波速c_L传播。

可以证明，在各向同性无限弹性介质中只存在两种波速。为此研究平行于x轴传播的波（这并不失一般性）。令c为其波速，则位移u、v、w都是单一变数$\xi=x-ct$的函数，

于是
$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2},\quad\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2v}{\partial\xi^2},\quad\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2},\quad\frac{\partial^2v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2v}{\partial\xi^2},\quad\cdots\cdots$$

且由于位移对y，z的偏导数为零、故有：

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x},\quad\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad\cdots\cdots$$

将上列各式代入式（3·23）得

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)u''=\rho c^2u''\\&\rho c^2v''=\mu v''\\&\rho c^2w''=\mu w''\end{aligned} \tag{3·31}$$

式中u''、v''、w''为u、v和w对ξ的二阶导数。

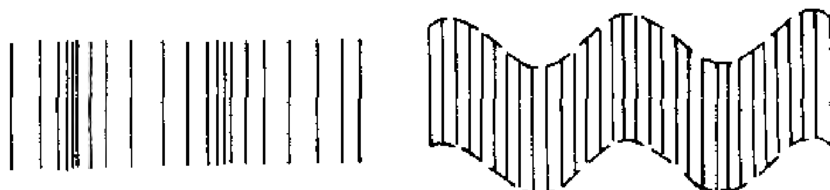
由式（3·31）可见，只有两种非零解

（1）　　$c=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}=c_L$和$v''=w''=0$　　（3·32）

（2）　　$c=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}=c_T$ 和 $u''=0$　　（3·33）

（3·32）所表示的为纵波，这时 $v=w=0$，质点只有沿波传播方向的运动，它使介质产生疏密变化（图6·2a），其波速为c_L。

（3·33)式表示的是横波，这时 $u=0$，质点只有垂直于传播方向的运动，使介质产生剪切变形（图6·2b），其波速为c_T。



(a)　纵波　　　　(b)　横波

图6·2　两种波

易证明纵波为无旋波，其旋转为零，而横波为等体积波。

顺便提一下，在各向异性的无限介质中，对于给定的传播方向，存在三个波速，与每个波速对应的位移矢量是互相垂直的，但各以不同的速度传播。一般情况下，这些波不是纯纵波或纯横波。只在一些特定方向上才可能出现一种为纯纵波，另两种为纯横波[54]。

§6·4　能量极值原理

Ⅰ．势能极值原理

在弹性静力学问题中，弹性体的一个重要特性是，在外载作用下，其真实的变形状态使得弹性体的能量具有极值。

设在体力和面力作用下，弹性体处于平衡状态，我们假设它相对于自然状态的位移和变形均很小。弹性体的表面 s 可分为两部分，$s=s_\sigma+s_u$。

在 s_σ 上规定面力

$$\overline{T_i}=\sigma_{ij}n_j \qquad (\text{在 } s_\sigma \text{上}) \tag{4·1a}$$

在 s_u 上规定位移

$$u_i=\overline{u_i} \qquad (\text{在 } s_u \text{ 上}) \tag{4·1b}$$

上面，$\overline{u_i}$ 和 $\overline{T}_i$ 为边界上点的已知函数。

设u_i、ε_{ij} 和 σ_{ij} 为相应于物体真实变形状态，也即满足平衡、变形连续和边界条件的位移、应变和应力。取一与 u_i 相邻近的位移状态$(u_i+\delta u_i)$，它满足边界上的位移约束条件，即在s_u 上 $\delta u_i=0$。在 s_σ 上，δu_i 是任意的。这种满足位移约束条件的无限小位移 δu_i 称之为虚位移或位移变分。此 δu_i 是由什么原因引起是无关紧要的，由于它足够小，可认为它不影响外力的作用，但使弹性体的平衡受到破坏。

计算在此虚位移下，体力和面力所作的虚功 $\int_V \rho f_i \delta u_i dV + \int_S \overline{T}_i \delta u_i ds$　　　　(a)

利用 Gauss 定理，上式面积分可化为体积分

$$\int_S \overline{T}_i \delta u_i ds = \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds = \int_V (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} dV$$
$$= \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \qquad (b)$$

利用应力的对称性，上式右边第二个积分成为

$$\int_V \sigma_{ij}\delta u_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2}[\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}] dV = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV \qquad (c)$$

将(b)代入(a)，并考虑到平衡方程 (3·4b)，得

$$\int_V \rho f_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} \overline{T}_i \delta u_i ds = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV \qquad (4·2)$$

这里已经用了 s_u 上 $\delta u_i = 0$ 的条件。(4·2) 式表述了连续体的虚功原理，即平衡状态下，弹性体上内力和外力虚功之和等于零，这里内力虚功为 $-\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV$。

若存在应变能函数 $W = W(\varepsilon_{ij})$，使得 $\sigma_{ij} = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$，则 (5·2)式右边化为

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} dV = \int_V \delta W dV = \delta \int_V W dV = \delta U \qquad (4·3)$$

这里 U 为总应变能，$U = \int_V W dV$。

注意到虚位移 δu_i 并不影响外力的作用，则式 (4·2)右边的 δ 可提到积分号外，由此得

$$\delta\left\{\int_V \rho f_i u_i dV + \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i ds\right\} = \delta \int_V W dV$$

或

$$\delta\left\{\int_V W dV - \int_V \rho f_i u_i dV - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i ds\right\} = 0 \qquad (4·4a)$$

称

$$-\int_V \rho f_i u_i ds - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i ds$$

为外力势能，而

$$P = \int_V W dV - \int_V \rho f_i u_i dV - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i ds$$

为弹性体总势能，则由 (4·4a) 得

$$\delta P = 0 \qquad (4·4b)$$

(4·4)式表述了弹性体的势能极值原理：在所有满足边界约束条件的位移中，真实的位移，即满足平衡方程的位移，使得系统的势能取得驻值，在几何线性情况下，势能取得极值，且为极小值。为证明这点，我们需利用线弹性体应变能函数正定性质。

比较真实位移 u_i 的势能 P 和邻近位移状态 $(u_i + \delta u_i)$ 下的势能 P'，这里 δu_i 为虚位移。

$$P' - P = \int [W(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) - W(\varepsilon_{ij})] dV - \int_V \rho f_i \delta u_i dV$$
$$- \int_{S_\sigma} \overline{T}_i \delta u_i ds \qquad (4·5)$$

将$w(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij})$展成幂级数

$$W(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij})=W(\varepsilon_{ij})+\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}+\cdots\cdots \quad (4\cdot6)$$

将此代入（4·5），并注意到（4·2），即有

$$P'-P=\int_V\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}dV \quad (4\cdot7)$$

忆及式（5;2·5）我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\cdot\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}c_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}=W(\delta\varepsilon_{ij})\geqslant 0 \quad (4\cdot8)$$

等号只在$\delta\varepsilon_{ij}$全为零下成立，由此得

$$P'-P\geqslant 0 \quad (4\cdot9)$$

这就证明了线弹性体的势能极小值原理，势能极小值原理反映了真实位移必须满足平衡条件的要求。若某一组位移函数u_i满足了势能极值原理，也即满足平衡条件。这说明从势能极值原理可以推出平衡方程，现证明如下。

注意到

$$\int_V\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}dV=\frac{1}{2}\int_V\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta_{j,i})dV=\int_V\sigma_{ij}\delta u_{i,j}dV$$

$$=-\int_V\sigma_{ij,j}\delta u_i dV+\int_S\sigma_{ij}n_j\delta u_i ds$$

$$=-\int_V\sigma_{ij,j}\delta u_i dV+\int_{S_\sigma}\sigma_{ij}n_j\delta u_i ds$$

则由

$$\delta p=\int_V\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}dV-\int_V\rho f_i\delta u_i dV-\int_{S_\sigma}\overline{T}_i\delta u_i ds=0$$

即得

$$-\int_V(\sigma_{ij,j}+\rho f_i)\delta u_i dV+\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\overline{T}_i)\delta u_i ds=0$$

由于变分δu_i的任意性，即得

$$\sigma_{ij,j}+\rho f_i=0 \qquad (在V内)$$

此即平衡方程，及

在s_σ上，$\sigma_{ij}n_j=\overline{T}_i$（面力边界条件）.

Ⅱ. 余能极值原理

上面讨论了真实位移满足的极值原理，现问真实应力是否也满足某一极值原理？

设物体在体力f_i及表面力作用下处于平衡，在表面s_σ上给定面力$\overline{T}_i$，在其余表面s_u上给定位移$\overline{u_i}$。令σ_{ij}表真实的应力场，它满足平衡方程和面力边界条件：

$$\sigma_{ij,j}+\rho f_i=0 \qquad (在V内)（见前3·4b式）$$

$$\sigma_{ij}n_j=\overline{T}_i \qquad (在s_\sigma上)（见前4·1a式）$$

此外，真实的应力还应满足变形连续条件，即与此真实应力对应的真实应变应保证变形体在变形后仍是连续的而不致有裂开或重叠发生。

考虑与真实应力邻近的另一应力状态，$(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})$，它也满足平衡条件和$s_\sigma$上的面力边

界条件。这里 $\delta\sigma_{ij}$ 是应力的变分，显然它满足无体力的平衡条件及在 s_σ 上无面力的边界条件：

$$\delta\sigma_{ij,j}=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{4·10}$$

$$(\delta\sigma_{ij})n_j=0 \qquad (\text{在}s_\sigma\text{上}) \tag{4·11}$$

而在 s_u 上 $\delta\sigma_{ij}$ 是任意的，且有关系

$$(\delta\sigma_{ij})n_j=\delta T_i \qquad (\text{在}s_u\text{上}) \tag{4·12}$$

与前面相反，考虑余虚功

$$\int_{s_u}u_i\delta T_i ds$$

利用 Gauss 定理，并注意到式（4·11）、（4·12）和（4·10）我们有

$$\begin{aligned}\int_{s_u}u_i\delta T_i ds&=\int_S u_i\delta T_i ds=\int_S u_i(\delta\sigma_{ij})n_j ds\\&=\int_V(u_i\delta\sigma_{ij})_{,j}dV=\int_V u_{i,j}\delta\sigma_{ij}dV+\int_V u_i\delta\sigma_{ij,j}dV\\&=\int_V u_{i,j}\delta\sigma_{ij}dV=\int_V\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV\end{aligned}$$

由此得

$$\int_V\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV-\int_{s_u}u_i\delta T_i ds=0 \tag{4·13}$$

此式称为余虚功原理。

现设应变 ε_{ij} 是有势的，即存在余应变能函数 $W_c=W_c(\sigma_{ij})$，它为应力分量的函数，使得应变分量等于W_c对应力分量的偏导数

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial W_c}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4·14}$$

则

$$\int_V\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV=\int\frac{\partial W_c}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}dV=\int\delta W_c dV=\delta U_c \tag{4·15}$$

由于 s_u 上 u_i 不改变而等于给定值 $\bar{u}_i$，于是式（4·13）可写成

$$\delta\int_V W_c dV-\delta\int_{s_u}\bar{u}_i T_i ds=0$$

或

$$\delta P_c=0 \tag{4·16}$$

这里

$$P_c=\int_V W_c dV-\int_{s_u}\bar{u}_i T_i ds \tag{4·17}$$

称为系统之总余能。

式（4·16）表述了余能极值原理：所有满足平衡条件的应力状态中，真实的应力状态使得系统的总余能达到驻值，在小变形线弹性体情况，则为极值，且可证明此极值为极小值，因此也称余能极小原理。

由于真实的应力状态与邻近满足平衡条件的非真实应力状态的差别在于前者满足变形连续条件，而后者不满足，可见余能极小原理实际上反映了变形连续条件。事实上，从余能极值原理可以推出变形连续条件（或称相容条件）。这里不再述及。

为了弄清应变能和余能、功和余功的区别和联系，我们以单向拉伸为例来加以说明，见

（图6·3(a)和(b)）。则功A由（a)图曲线下面积$OABO$表示，而余功A_c由曲线上面积$OACO$表示。同样地，单位体积之应变能W由（b)图曲线下面积$OABO$表示，而余能W_c由曲线上面积$OACO$表示。两者之和为矩形面$OBACO$。因此两者的关系为

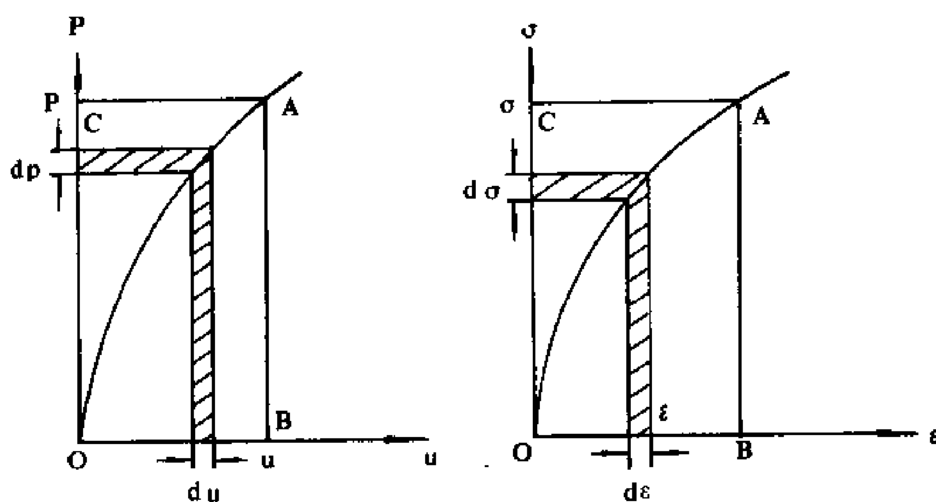


图6·3 余应变能和应变能的关系

$$\left.\begin{aligned} A + A_c = pu \\ W + W_c = \sigma\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{4·18}$$

因此相对于pu和$\sigma\varepsilon$来说，功和余功，能和余能是互补的。

§6·5 Hamilton原理及其在建立梁的振动方程中的应用[27]

本节讨论弹性动力学问题中的能量极值原理。设位移很小，因此质量加速度a_i可由$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$给出。运动方程为：

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{5·1}$$

设δu_i为相对于真实位移u_i的偏离，即位移变分，它满足s_u上的位移边界条件，即

$$\delta u_i = 0 \qquad （在 s_u 上） \tag{5·2}$$

表面力$\overline{T}_i$和体力f_i在虚位移上之虚功为

$$\int_V \rho f_i \delta u_i dV + \int_{s_\sigma} \overline{T}_i \delta u_i ds$$

考虑（5·1）式，并作同推导静力学虚功原理（4·2）式时相似的变换，并注意到运动方程(5·1)式，可得

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \int_V \left(\rho f_i - \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)\delta u_i dV + \int_{s_\sigma} \overline{T}_i \delta u_i ds \tag{5·3}$$

若存在应变能函数W，则上式可写为：

$$\delta\int_V WdV=\int_V\left(\rho f_i-\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)\delta u_i dV+\int_{S_\sigma}\overline{T}_i\delta u_i ds \tag{5·4}$$

式中 δu_i 是时间 t 和质点坐标x_i的函数。上式在任意两瞬时 t_0 和 t_1 之间积分，得

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta W dV dt=\int_{t_0}^{t_1}dt\int_V \rho f_i\delta u_i dV+\int_{t_0}^{t_1}dt\int_{S_\sigma}\overline{T}_i\delta u_i ds$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}dt\int_V \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i dV \tag{5·5}$$

将上式最后一项以 J 表示，若改变积分次序，并用分部积分可得

$$J=\int_{t_0}^{t_1}dt\int_V \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i dV=\int_V dV\int_{t_0}^{t_1}\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i dt$$

$$=\int_V \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i\Big|_{t_0}^{t_1}dV-\int_V dV\int_{t_0}^{t_1}\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\delta u_i}{\partial t}dt \tag{5·6}$$

这里，因是小位移，可视 ρ 不随时间变化。 再给时刻 t_0 和 t_1 时之变分以这样的限制， 即在物体的各点上有

$$\delta u_i(t_0)=\delta u_i(t_1)=0 \qquad (\text{在}V\text{上}) \tag{5·7}$$

即所有运动学上可能的运动在 t_0 和 t_1 时刻与真实运动一致。由（5·7），则（5·6）成为

$$J=-\int_{t_0}^{t_1}\int_V \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\delta u_i}{\partial t}dV dt$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta\left(\frac{1}{2}\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)dV dt$$

$$=-\int_{t_0}^{t}\delta K dt \tag{5·8}$$

这里
$$K=\frac{1}{2}\int_V \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t}dV \tag{5·9}$$

为运动物体的动能，因此，在式（5·7)的假设下，式（5·5)成为

$$\int_{t_0}^{t}\delta(U-K)dt=\int_{t_0}^{t}\int_V \rho f_i\delta u_i dV dt+\int_{t_0}^{t}\int_{S_\sigma}\overline{T}_i\delta u_i ds dt \tag{5·10}$$

这里
$$U=\int_V WdV \tag{5·11}$$

为物体的总应变能。

若作用于物体的外力能使得（5•10）式右边成为载荷势能 A的变分，即

$$\int_V \rho f_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} \overline{T}_i \delta u_i ds = -\delta A \tag{5•12}$$

例如外力f_i和$\overline{T_i}$与位移无关的情况，则（5•10）式可写为

$$\delta \int_{t_0}^{t} (U - K + A) dt = 0 \tag{5•13}$$

此即 Hamilton 原理。式中的被积函数称为 Lagrange 函数，以L表之

$$L \equiv U - K + A \tag{5•14}$$

而积分

$$H \equiv \int_{t_0}^{t} (U - K + A) dt \tag{5•15}$$

则称为 Hamilton 作用量。

这里，Hamilton 原理可表述为：在满足（5•2）和（5•7）式的运动系上所有可能的运动中，真实的运动使得 Hamilton 作用量达驻值，由于 Hamilton 原理中的作用量不是正定的，对真实的运动一般只取驻值而不取极小值。

现举例说明 Hamilton 原理在推导弹性动力学控制方程中的应用。

考虑一个梁的振动，(图6•4)。设振动发生在包含截面形心主惯轴的纵向平面内，以y表示梁轴上的点的挠度。对小挠度，并忽略剪切变形的影响，我们有

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \tag{5•16}$$

梁的动能包括单元平动动能和转动动能两部分，其平动动能为

$$\frac{1}{2}\int_0^l m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dt$$

式中m为梁单位长度之质量。令I_p为单位梁长相对于其惯性轴之转动惯量

$$I_p = \frac{\gamma}{g}\int_A \overline{y}^2 dA$$

式中 A为梁之横截面积，γ 为梁材料之比重，$\overline{y}$ 为横截面上之点与截面中性轴间之距离，则梁转动部分之动能为

$$\frac{1}{2}\int_0^l I_p \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right)^2 dx$$

式中 $\partial^2 y/\partial x \partial t$ 为转动角速度，则梁之总动能为

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l I_p \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right)^2 dx \tag{5•17}$$

外载的势能为

$$A = -\int_0^l p(x,t) y(x) dx - M_l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_l + M_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_0 + Q_l y_l - Q_0 y_0 \tag{5•18}$$

由 Hamilton 原理（5·13）式我们得

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^l\left[\frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}I_p\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)^2-py\right]dx-M_l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_l+M_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0+Q_ly_l-Q_0y_0\right\}dt=0 \qquad (5\cdot19a)$$

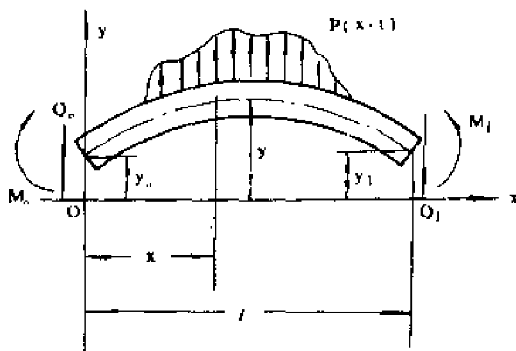


图6·4 Hamilton 原理对梁的应用

在 t_0 和 t_1 瞬时有

$$\delta y=0,\qquad \partial(\delta y)/\partial x=\delta(\partial y/\partial x)=0 \qquad (5\cdot19b)$$

由式(5·19a)的变分运算得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_0^l\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}-m\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial\delta y}{\partial t}-I_p\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\cdot\frac{\partial^2\delta y}{\partial x\partial t}-p\delta y\right)dx-M_l\delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_l+M_0\delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0+Q_l\delta y_l-Q_0\delta y_0\right]dt=0$$

对上式进行分部积分并注意到（5·19b)式得

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(I_p\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)-p(x,t)\right]\delta y\,dx\,dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-M\right]\delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\}\Big|_0^l dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(I_p\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)-Q\right]\delta y\right\}\Big|_0^l dt=0 \qquad (5\cdot20)$$

由于变分的任意性，则得梁的运动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(I_p\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)=p(x,t) \qquad (5\cdot21)$$

和梁端之边界条件

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=M\qquad 或\qquad \delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0 \qquad (5\cdot22a)$$

及
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(I_p\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)=Q \text{ 或 } \delta y=0 \tag{5·22b}$$

这些梁的运动控制方程包含了转动惯性的影响为Lord Rayleigh所得到，故称之为 Rayleigh 方程。若忽略转动惯性之影响（当波长比梁的横向尺寸大得多时），且梁为等截面均质梁，则上述控制方程（5·21）可简化为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=\frac{1}{\rho A}p \tag{5·23}$$

习　题

6·1　试指出，若 $\nabla^4 F_i=0$，则位移 $u_i=(\lambda+2\mu)F_{i,jj}/\mu(\lambda+\mu)-F_{j,ji}/\mu$ 能满足无体力的 Navier-Cauchy 方程 $\mu u_{i,jj}+(\lambda+\mu)u_{j,ji}=0$。

6·2　试证，若 ϕ 和 ψ_i 满足波动方程 $\nabla^2\phi=\rho\ddot{\phi}/(\lambda+2\mu)$，$\nabla^2\psi_k=\rho\ddot{\psi}_k/\mu$，则位移 $u_i=\phi_{,i}+e_{ijk}\psi_{k,j}$ 满足无体力的 Navier 方程 $\mu u_{i,jj}+(\lambda+\mu)_{j,ji}=\rho\ddot{u}_i$。

6·3　试推导平面应力问题的 Navier-Cauchy 方程 $\mu\nabla^2 u_\alpha+\mu(3\lambda+2\mu)u_{\beta,\beta\alpha}/(\lambda+\mu)+\rho f_\alpha=0$　$(\alpha,\ \beta=1,\ 2)$

6·4　平衡条件下的 Navier 方程可写成 $\mu u_{i,jj}+\frac{\mu}{1-2\nu}u_{j,ji}+\rho f_i=0$，但此对不可压缩情况 $\left(\nu=\frac{1}{2},\ E=3\mu\right)$ 为不定的。利用平衡方程，试指出此情况下方程可写为

$$\mu u_{i,jj}+\Theta_{,i}/3+\rho f_i=0 \tag{a}$$

式中 $\Theta=\sigma_{kk}$。于是问题归结为由三个方程（a）及不可压缩条件 $u_{i,i}=0$ 求解 4 个未知量 u_i 和 Θ。

提示：由 $2e_{ij,j}=u_{i,jj}+u_{j,ij}=u_{i,jj}=\frac{1}{\mu}\sigma_{ij,j}-\frac{1}{3\mu}\Theta_{,i}$ 及平衡方程 $\sigma_{ij,j}+\rho f_i=0$ 即可得（a）式。

6·5　若体力有势，即 $\rho f_i=\psi_{,i}$，试证平面应力和平面应变下的相容方程可分别写为 $\nabla^2\sigma_{\alpha\alpha}=(1+\nu)\nabla^2\psi$ 和 $\nabla^2\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{1}{1-\nu}\nabla^2\psi$，式中 $\sigma_{\alpha\alpha}=\sigma_x+\sigma_y$，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$。

6·6　证明Neumann定理：下列方程组的解 $u_i(\mathrm{x},\ t)$ 是唯一的

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}\right)+F_i-\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=0 \qquad \mathrm{x}\in V,\ t\geqslant 0 \tag{①}$$

$$u_i=f_i(\mathrm{x},\ t) \qquad \mathrm{x}\in s_u,\ t\geqslant 0 \tag{②}$$

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}n_j=g_i(\mathrm{x},\ t) \qquad \mathrm{x}\in s_\sigma,\ t\geqslant 0 \tag{③}$$

$$u_i=h_i(\mathrm{x}),\ \dot{u}_i=k_i(\mathrm{x}),\ t=0,\ \mathrm{x}\in V+s_\sigma+s_u \tag{④}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{⑤}$$

式中，F_i（单位体积之体力），f_i，g_i，h_i，k_i 为已知函数，而$W(\varepsilon_{ij})$为正定函数。

提示：设有两种解u_i'和u_i''，则将两种解之差 $u_i=u_i'-u_i''$满足的平衡方程乘$\frac{\partial u_i}{\partial t}$，并在$V$内和$(0, t)$间积分，注意到动能为正定的，即可求得。

6·7 试证，在泊松比 $\nu=0$ 及体力 $f_i=0$下，取应力解 $\sigma_{ij}=s_{,ij}$（s 为标量函数），则 $\nabla^2 s=\text{cosnt}$的解可满足平衡和相容条件。

提示：平衡方程为 $\sigma_{ij,j}+\rho f_i=0$，相容方程在$\nu=0$下为$\sigma_{ij,kk}+\sigma_{kk,ij}=\sigma_{ik,jk}+\sigma_{jk,ik}$。

6·8 对球对称问题，可取位移函数$u_i=\varphi(r)x_i$，试由无体力的Navier方程$\mu\nabla^2 u_i+(\lambda+\mu)\theta_{,i}=0$ $(\theta=\varepsilon_{kk})$求解$\varphi(r)$。

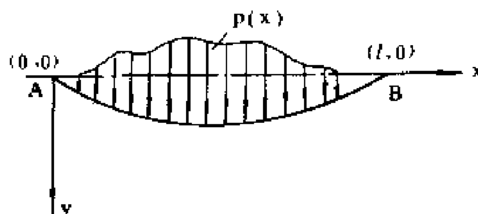
6·9 设载荷 p 与 p 方向之位移 u 之关系为 $u=cp^2$，求功 A和余功A_c。

6·10 试证线弹性体在表面力T_i和体力 f_i 作用下的体积改变 ΔV等于

$$\Delta V\equiv\int_V\theta dV=\frac{1-2\nu}{E}\left(\int_S T_i x_i ds+\int_V \rho f_i x_i dV\right)$$

式中，$\theta=\varepsilon_{kk}$。

6·11 受拉的弹性弦在$(0, 0)$和$(l, 0)$端固定，受到单位长度集度为$p(x)$的分布横向载荷。设横向挠度很小，因此由挠曲引起的张力T的变化可忽略不计。试用最小势能原理推导静平衡时弦之挠曲线微分方程。



题6·11图 弹性弦

提示：总势能$P=U-\int_0^l p(x)ydx$，而$U=Te$，其中 e 为弦的伸长，$e=\int_0^l(ds-dx)\simeq\frac{1}{2}\int_0^l(y')^2dx$，$\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$，这里设$(y')^2\ll 1$。

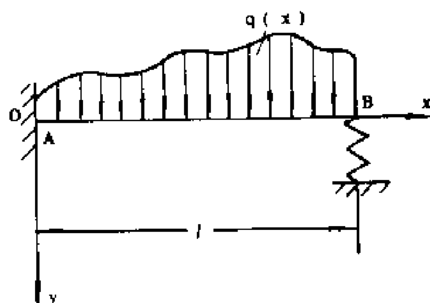
6·12 在xy坐标面内有一周边固定的薄膜受到各向均匀的张力T的拉紧。膜面受到法向分布载荷$p(x, y)$（力/面积）的作用挠曲，设横向挠度很小，因此由挠曲引起膜之张力T的改变可忽略不计。试用最小势能原理推导挠曲面$W(x, y)$的微分方程。

提示：应变能$U=T\Delta s$，式中 Δs 为膜的面积增量

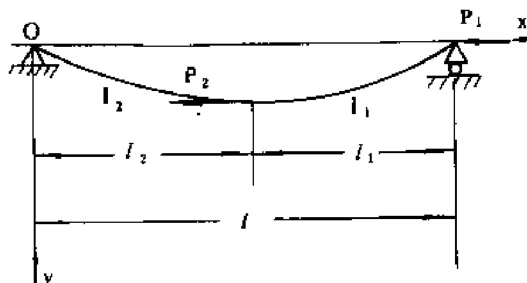
$$\Delta s=\int_S(ds-dxdy)=\int_S\left(\sqrt{W_x^2+W_y^2+1}-1\right)dxdy=\frac{1}{2}\int(W_x^2+W_y^2)$$

$dxdy$，式中$W_x=\partial W/\partial x$，$W_y=\partial W/\partial y$。

6·13 试按最小势能原理推导图示梁之平衡方程和边界条件。设B端弹簧的刚度系数为k



题6·13图 梁受横向载荷

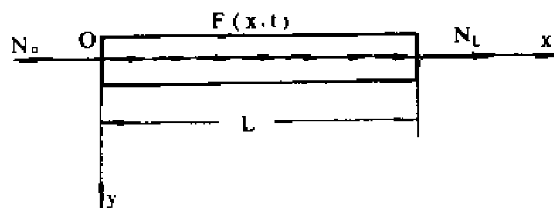


题6·14图 杆受轴向载荷

（反力$R=ky$）。

6·14 利用最小势能原理求图示两端铰支杆受两个轴力p_1和p_2作用下的平衡微分方程。

6·15 试利用 Hamilton 原理推导杆纵向振动的微分方程和边界条件，设杆受到沿杆轴线作用的分布载荷$F(x,t)$（力/长度），杆之横截面积为$A(x)$，单位长度之质量为$\mu(x)$。杆轴线上任一点的轴向位移以$u(x)$表之，见（6·15图）。



题6·15图 杆受变动载荷

第七章　有限变形下的运动方程和功率方程、超弹性材料

在§4·2中我们已经得到Euler描述的局部形式的运动方程和平衡方程，这些方程不论连续体变形的大小都是一样的。但在Lagrange描述中，无限小变形和有限变形下的方程却有实质性的差别。在无限小位移的情况下，忽略变形对微单元体各微面及其应力的大小和方向的影响，在列出微体平衡和运动方程时，认为在瞬时构形和参考构形中，它们没有区别。因此，只要在Euler描述的运动方程中，将x_i代以X_i，即可得到Lagrange描述的运动方程，此时运动方程为线性的。

在有限变形下，变形后单元体微面的大小、方向都发生不能忽略的改变，不能再忽视微单元体的变形和转动对力的投影的影响，因此在参考构形（Lagrange坐标）中建立起来的运动方程同在变形构形中（Euler坐标）建立的运动方程，形式上将大不相同。显然前者要复杂得多，但却把问题的几何非线性性质揭示出来了。在运动学中我们已经看到Largrange描述比Euler描述简单，由于本构关系必须在同一构形中建立，因而在采用Lagrange描述时，Euler应力也应以某一确定的规则转换到参考构形中去，从而引入了第一和第二类Piola-Kirchhoff应力张量。在转换中虽然规则的确定带有人为性，但除了数学上相容的要求以外，定义的应力及其共轭应变所对应的变形功或功率应与实际吻合，这一点是必须强调的。下面我们将看到，在动力学问题中，Lagrange描述要比Euler描述复杂。

本章将讨论有限变形下Lagrange描述的运动方程和功率方程，讲述非线性场论中的有限元要义并介绍超弹性材料的概念。

§7·1　Piola-Kirchhoff 应力张量

如上所述当在参考初始构形中去建立运动和平衡方程时，也需要参照初始构形去确定应力。在初始构形中定义与瞬时构形中Euler应力σ_{ij}相对应的应力张量是人为设想的，但在数学上必须相容。

设ds为瞬时变形构形中的面元，其分量为$ds_i=n_i ds$，该面元上的面力$d\mathbf{F}$，其分量为

$$dF_i=T_i ds=\sigma_{ij}n_j ds=\sigma_{ij}ds_j \tag{1·1}$$

这里σ_{ij}为Euler应力张量。

在初始构形中，该面元为$d\overline{s}$，其分量$d\overline{s_I}=N_I d\overline{s}$，我们在初始构形中定义如下的应力张量$T_{Ij}$

$$dF_i=T_i^{(L)}d\overline{s}=T_{Qi}N_Q d\overline{s}=T_{Qi}d\overline{s}_Q \tag{1·2}$$

张量T_{Qi}称为Lagrange应力张量，或第一类Piola-Kirchhoff应力张量。在这种定义中，我们是把ds上的面力$d\mathbf{F}$不改变大小和方向地直接移置到$d\overline{s}$上（图7·1a）。由（2:5·6c）我们有

$ds_j = JX_{Q,j}d\bar{s}_Q$，代入（1·1），并比较（1·2）和（1·2）式，即得 Lagrange 应力张量同Euler应力张量的关系

$$T_{Qi} = JX_{Q,j}\sigma_{ij} = X_{Q,j}\tau_{ij} \tag{1·3a}$$

式中 $\tau_{ij} = J\sigma_{ij}$ (1·3b)

称为Kirchhoff应力。由（1.3）式可见，Lagrange应力张量是不对称的，因此难以在本构方程中使用（因为一般本构方程是建立应力与应变间的关系，而应变张量是对称的，要求相应的应力张量也是对称的）。为克服这个困难，我们不是把变形构形面元上的力 $d\mathbf{F}$ 直接移置至初始构形的面元 $d\bar{\mathbf{s}}$ 上，而是令其受如同dx_i到dX_I的相同变换（一阶逆变换），即 $d\bar{\mathbf{s}}$ 面元上的面力$d\mathbf{F}^{(K)}$（图7·1b）的分量$dF_P^{(K)}$由下式得到

$$dF_P^{(K)} = X_{P,i}dF_i \tag{1·4}$$

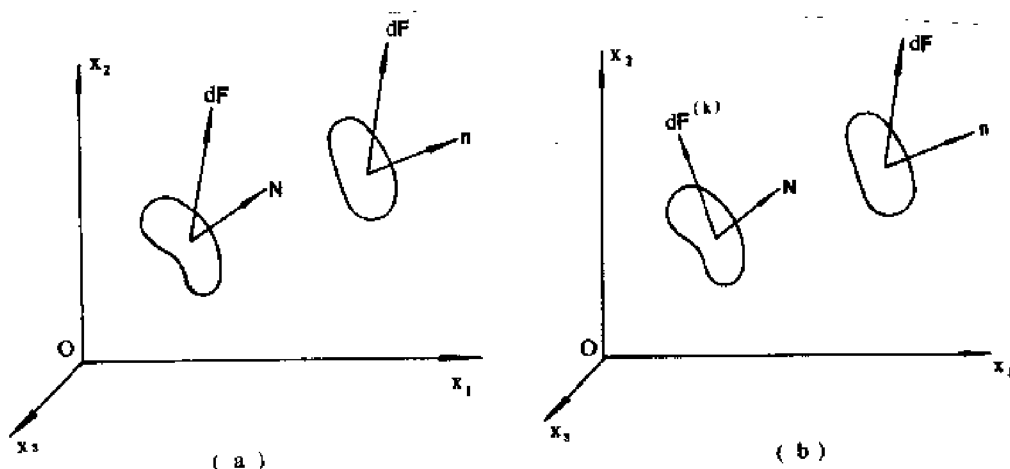


图7.1 在定义Piola—Kirchhoff应力时，面元的初始位置和瞬时位置上力矢量的对应关系

然后由下式定义初始构形中的新的应力张量

$$dF_P^{(K)} = S_{PQ}d\bar{s}_Q \tag{1·5}$$

此应力张量称为第二类Piola-Kirchhoff应力张量，将（1·1）代入（1·4），并同（1·5）比较，得

$$S_{PQ} = JX_{P,i}X_{Q,j}\sigma_{ij} \tag{1·6a}$$

或
$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}^{-1})^T \tag{1·6b}$$

由上式可见，第二类Piola-Kirchhoff应力张量是对称的，比起不对称的Lagrange 应力张量更适合于本构方程中使用。

比较（1·3）和（1·6）可建立初始构形中两种应力张量的关系

$$S_{PQ} = X_{P,i}T_{Qi} \tag{1·7a}$$

或
$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}^T \tag{1·7b}$$

（1·7a）、（1·3）和(1·6a)各式对T_{Qi}，σ_{ij}解出，得

$$T_{Qi} = x_{i,P}S_{PQ} \tag{1·8}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} x_{j,Q} T_{Qi} \tag{1·9}$$

$$= \frac{1}{J} x_{i,P} x_{j,Q} S_{PQ} \tag{1·10}$$

其中 $J = \rho_0/\rho$

§7·2 Lagrange描述的运动方程

考虑一处于变形状态占有体积V和表面积s的连续体，其初始构形占有体积V_0和表面积$\bar{s}$，物体受有体力和面力。在Euler描述中，单位质量的体力为f_i，微面积ds上作用的面力为$dF_i = \sigma_{ij} n_j ds$。而在Lagrange描述中，单位质量的体力为$\mathring{f}_i$，微面积上的面力为$dF_i = T_{Ji} N_J d\bar{s}$，我们假定，单位质量的体积力同变形无关，即

$$\mathring{f}_i = f_i \tag{2·1}$$

Euler描述的运动方程已如§4·2所述，其积分形式为

$$\int_S dF_i + \int_V \rho f_i dV = \int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV \tag{2·2}$$

现将其转换为Lagrange描述，利用(1·2)、(2·1)及质量守恒，上式变为

$$\int_{\bar{s}} T_{Ji} N_J d\bar{s} + \int_{V_0} \rho_0 f_i dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \frac{Dv_i}{Dt} dV_0 \tag{2·3}$$

将面积分化为体积分，整理得

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial T_{Ji}}{\partial X_J} + \rho_0 f_i - \rho_0 \frac{Dv_i}{Dt} \right) dV_0 = 0$$

上式对连续体内的任一微小部分也成立，由此得

$$\frac{\partial T_{Ji}}{\partial X_J} + \rho_0 f_i = \rho_0 \frac{Dv_i}{Dt} \tag{2·4a}$$

当取任一瞬时τ之构形为参考构形，此构形之体积为V_τ，密度为ρ_τ，质点坐标为θ_i，相应的Lagrange应力分量为T^τ_{ji}，则类似于(2·4 a)得

$$\frac{\partial T^\tau_{ji}}{\partial \theta_j} + \rho_\tau f_i = \rho_\tau \frac{Dv_i}{Dt} \tag{2·4 b}$$

(2·4 a)式即为参考构形中用Lagrange描述的运动方程。静力平衡方程为

$$\frac{\partial T^\tau_{ji}}{\partial \theta_j} + \rho_\tau f_i = 0 \tag{2·4 c}$$

将式(1·8)式代入式(2·4 a)，即得用Kirchhoff应力张量表达的运动方程

$$\frac{\partial}{\partial X_J}(x_{i,P} S_{PJ}) + \rho_0 f_i = \rho_0 \frac{Dv_i}{Dt} \tag{2·5}$$

将变形梯度用位移分量表出，得

$$\frac{\partial}{\partial X_J}\left[S_{JP}'\left(\delta_{iP}+\frac{\partial u_i}{\partial X_P}\right)\right]+\rho_0 f_i=\rho_0\frac{Dv_i}{Dt} \tag{2·6}$$

若将位移梯度$\partial u_i/\partial X_P$用线性化应变分量$\varepsilon_{iP}$和线性化转动分量$\Omega_{iP}$表示，则

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_P}=\varepsilon_{iP}+\Omega_{iP} \tag{2·7 a}$$

式中

$$\varepsilon_{iP}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_P}+\frac{\partial u_P}{\partial X_i}\right) \tag{2·7 b}$$

$$\Omega_{iP}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_P}-\frac{\partial u_P}{\partial X_i}\right) \tag{2·7 c}$$

则式（2·6）可写成

$$\frac{\partial}{\partial X_J}[S_{JP}(\delta_{iP}+\varepsilon_{iP}+\Omega_{iP})]+\rho_0 f_i=\rho_0\frac{Dv_i}{Dt} \tag{2·8}$$

由此式可看出变形和转动对运动方程的影响。

§7·3 虚功率方程、非线性场论中的有限元要义

非线性场中的初值与边值问题，在最一般情况下可同时包含几何非线性和材料非线性，寻求其解析解是困难的，因而通常采用有限元法和差分法进行数值分析。非线性场中有限元的算法用的是增量法，即把加载步骤分成若干步，用前一步得到的结果去求下一次增量加载的解答。这样做既可以由于步长小而满足材料非线性增量型本构方程的要求（例如式（6:1·4）给出的次弹性材料的本构方程）；又可以用每次加载的新的节点坐标等于前次坐标加位移值来获得的办法以考虑大变形对于力效应的影响。研究非线性场论中有限元的关键是建立其控制方程。从几何非线性的角度上考虑，它涉及到以什么作为参考构形的问题，由此导出了从原始构形出发的Lagrange描述法和瞬时构形出发的适时Lagrange描述法（Updated Lagrangian description）；从材料非线性角度考虑，关键是如何保证材料本构关系的客观性原理的满足，对适时的Lagrange描述法，这就要求如同式（6:1·4）和（6:1·10）一样，用应力的 Jaumann 率来建立其本构关系，这就产生了如何将通常的标称应力的增量与对应于Jaumann率的应力增量联系起来的问题（后一增量是在与材料固连的坐标系中定义的，因而是旋转不变的）。我们就着重从上述两方面来讨论这些问题，在此之前我们必须建立虚功率方程。

我们仍考虑如（图 2:2·3）所示的连续介质域Ω，它的初始构形坐标为X_I，任一时刻τ的构形坐标为θ_i，而瞬时构形坐标为x_i。其对应之面积、体积和密度分别为s_0，V_0，ρ_0；s_τ，V_τ，ρ_τ；s，V，ρ。瞬时构形上表面力、体积力和惯性力在虚速度场dv_i上所做的功率的总和为：

$$\delta W=\int_s T_i\delta v_i ds+\int_V \rho f_i\delta v_i dV+\int_V\rho\left(-\frac{Dv_i}{Dt}\right)\delta v_i dV \tag{3·1 a}$$

式中：T_i——瞬时构形上单位面积的面力分量；

f_i——单位质量之体力

若以 τ 时刻构形为参考构形，则虚功率之总和可写为

$$\delta W=\int_{S_\tau} T_j^\tau \delta v_j ds_\tau+\int_{V_\tau} \rho_\tau f_j \delta v_j dV_\tau + \int_{V_\tau} \rho_\tau \left(-\frac{Dv_j}{Dt}\right) \delta v_j dV_\tau \tag{3·1b}$$

应用式（1.2）和Gauss定理将上式的面积分化为体积分，并利用式（2·4b）则上式可化简

$$\delta W=\int_{S_\tau} T_{ij}^\tau n_i^\tau \delta v_j ds_\tau+\int_{V_\tau} \rho_\tau f_j \delta v_j dV_\tau+\int_{V_\tau} \rho_\tau \left(-\frac{Dv_j}{Dt}\right) \delta v_j dV_\tau$$

$$=\int_{V_\tau} T_{ij}^\tau \frac{\partial(\delta v_j)}{\partial\theta_i} dV_\tau+\int_{V_\tau} \frac{\partial T_{ij}^\tau}{\partial\theta_i}\delta v_j dV_\tau+\int_{V_\tau} \rho_\tau f_j \delta v_j dV_\tau + \int_{V_\tau} \rho_\tau \left(-\frac{Dv_j}{Dt}\right) \delta v_j dV_\tau$$

$$=\int_{V_\tau} T_{ij}^\tau \frac{\partial(\delta v_j)}{\partial\theta_i} dV_\tau \tag{3·2}$$

若将惯性力并入体力并引入记号

$$F_j=f_j-\frac{Dv_j}{Dt} \tag{3·3}$$

将式(3·2)的结果代入式（3·1b）的左边，并应用上述记号，我们有：

$$\int_{V_\tau} T_{ij}^\tau \delta \left(\frac{\partial v_j}{\partial\theta_i}\right) dV_\tau=\int_{S_\tau} T_j^\tau \delta(v_j) ds_\tau+\int_{V_\tau} \rho_\tau F_j \delta v_j dV_\tau \tag{3·4}$$

由于虚速度场在不破坏位移约束条件下可任意选取，因而原则上可将 $t+\Delta t$ 瞬时虚速度场取得与 t 瞬时一样，若仍以 τ 时刻构形为参考构形，则我们得到

$$\int_{V_\tau} \left(T_{ij}^\tau+\Delta T_{ij}^\tau\right) \delta \left(\frac{\partial v_j}{\partial\theta_i}\right) dV_\tau = \int_{S_\tau} \left(T_j^\tau+\Delta T_j^\tau\right) \delta v_j ds_\tau+\int_{V_\tau} \rho_\tau \left(F_j^\tau+\Delta F_j^\tau\right) \delta V_j dV_\tau \tag{3·5}$$

式（3·5）与（3·4）相减后除以 Δt，并取极限 $\Delta t \to 0$，则可得到：

$$\int_{V_\tau} \dot{T}_{ij} \delta \left(\frac{\partial v_j}{\partial\theta_i}\right) dV_\tau = \int_{S_\tau} \dot{T}_j^\tau \delta(v_j) ds_\tau+\int_{V_\tau} \rho_\tau \dot{F}_j \delta v_j dV_\tau \tag{3·6}$$

式（3·4）—（3·6）是不同形式的虚功率方程，若在式（3·5）的两边同乘dt则得到

$$\int_{V_\tau} \left(T_{ij}^\tau+\Delta T_{ij}^\tau\right) \delta \left(\frac{\partial \Delta u_j}{\partial\theta_i}\right) dV_\tau = \int_{S_\tau} \left(T_j^\tau+\Delta T_j^\tau\right) \delta(\Delta u_j) ds_\tau+\int_{V_\tau} \rho_\tau \left(F_j^\tau+\Delta F_j^\tau\right) \delta(\Delta u_j) dV_\tau \tag{3·7}$$

式中 T^{τ}_{ij}——相对于参考构形θ_i写出的 t 时刻的非对称应力(在τ为零时即为Lagrange应力);

Δu_j——在区间[t , $t+\Delta t$]内位移分量的增量;

T^{τ}_{j}——在 τ 时刻构形上写出的每单位面积的标称表面力分量;

F^{τ}_{j}——包含惯性力在内的单位质量体力。

式(3·4)—(3·7)是相对于任意中间构形θ_i写出的，下面我们讨论两种特殊情形：

(i) 若让 $\tau=0$，则$\theta_i=X_i$，则从式(3·7)和将在下一节中得到的式(4·4 c)，得到了以初始构形为参考状态的Lagrange描述

$$\int_{V_0}(T_{Ij}+\Delta T_{Ij})\delta\left(\frac{\partial\Delta u_j}{\partial X_I}\right)\delta V_0$$
$$=\int_{V_0}(S_{IJ}+\Delta S_{IJ})\delta(\Delta E_{IJ})dV_0$$
$$=\int_{S_0}(T_I+\Delta T_I)\delta(\Delta u_I)ds_0+\int_{V_0}\rho_0(F_I+\Delta F_I)\delta(\Delta u_I)dV_0 \qquad (3·8)$$

式中S_{IJ}——第二类Piola—Kirchhoff应力张量;

ΔE_{IJ}——Green应变张量的增量;

T_I——单位初始表面上的标称表面力分量。

(ii) 若让 $\tau=t$，则$\theta_i=x_i$，我们得到了以时刻 t 的构形为参考构形的适时Lagrange 描述或称Euler描述，即

$$\int_V(\sigma_{ij}+\Delta T_{ij})\delta\left(\frac{\partial\Delta u_j}{\partial x_i}\right)dV$$
$$=\int_S(T_j+\Delta T_j)\delta(\Delta u_j)ds+\int_V\rho(F_j+\Delta F_j)\delta(\Delta u_j)dV \qquad (3·9)$$

上式中所有的上标都已省略，各量及其增量都是以现在瞬时 t 作为参考构形来建立($t+\Delta t$)时刻的相应关系的。特别应当提及的是σ_{ij}为 t 时刻的Euler应力张量；ΔT_{ij}是相对于 t 瞬时构形的标称应力张量的增量，应注意的是，在 t 时刻T_{ij}等于σ_{ij}，但它们的变化率与增量则是不同的。

根据式(3·8)和(3·9)可以形成两种与它们相对应的非线性有限元模式，下面我们着重以适时拉格朗日描述来加以讨论，它特别适用于塑性、蠕变、粘弹性和粘塑性材料。设材料服从次弹性给出的本构方程或Hill给出的下述以率的形式表述的本构关系[17]

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij}=M_{ijkl}V_{Kl}+\overset{\circ}{\tau}_{ij} \qquad (3·10)$$

式中 $\overset{\nabla}{\tau}_{ij}$——Kirchhoff应力$\tau_{ij}$的Jaumann率($\tau_{ij}=J\sigma_{ij}$)，参见式(1·3 b)

M_{ijkl}——反映材料性质的四阶张量;

$\overset{\circ}{\tau}_{ij}$——与初应力张量有关的项;

V_{kl}——形变率；

d_{kl}——则是由形变率V_{kl}乘时间dt求得的，即

$$d_{kl}=V_{kl}dt=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_l}{\partial x_k}+\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_l}\right) \tag{3·11}$$

作为式（3·10）的具体例子，可写出弹塑性的增量本构方程为

$$\tau^{\nabla}_{ij}=D^{EP}_{ijkl}V_{kl} \tag{3·12}$$

或写成增量形式

$$^{J}(\Delta\tau_{ij})=D^{EP}d_{kl} \tag{3·13}$$

这里再次强调$^{J}(\Delta\tau_{ij})$是在固连于材料的座标架内在瞬时 t 定义的应力增量 。下面的任务就是要找到$^{J}(\Delta\tau_{ij})$与标称应力增量ΔT_{ij}的关系，以便将有限变形下的材料本构关系引入到式(3·9)中去。为此我们要注意在瞬时构形作为参考构形时，由于$x_{i,K}=\delta_{iK}$，$J=1$，因而Euler应力σ_{ij}、Kirchhoff应力τ_{ij}和标称应力T_{ij}在数值上相等，并且对称；但是它们的变化率则是不同的。事实上由式（1·3 b ）及（1·9）并注意其中取 τ 瞬时构形作为参考构形，我们有

$$\tau_{ij}=J\sigma_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial\theta_k}T_{kj} \tag{3·14}$$

上式左右端对 t 求导可得

$$\dot{\tau}_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial\theta_k}T_{kj}+\frac{\partial x_i}{\partial\theta_k}\dot{T}_{kj} \tag{3·15}$$

由上式可见 $\dot{\tau}_{ij}$ 与$\dot{T}_{ij}$之间的差别与标称应力及速度梯度有关。

参照式（6·1·3）易得Kirchhoff应力τ_{ij}的Jaumann率的下述表达式：

$$\tau^{\nabla}_{ij}=\dot{\tau}_{ij}-\tau_{ik}W_{jk}-\tau_{jk}W_{ik} \tag{3·16}$$

注意到当取 t 时刻构形为参考构形时，有

$$\frac{\partial x_i}{\partial\theta_k}=\delta_{ik},\qquad \sigma_{kj}=T_{kj}=\tau_{kj} \tag{3·17}$$

我们得到

$$\dot{\tau}_{ij}=v_{i,k}\sigma_{kj}+\dot{T}_{ij} \tag{3·18}$$

$$\tau^{\nabla}_{ij}=\dot{\tau}_{ij}-\sigma_{ik}W_{jk}-\sigma_{jk}W_{ik} \tag{3·19}$$

综合式（3·18）和式（3·19），且应用下式〔参见式(3·2·3)〕

$$-W_{ij}=V_{ij}-v_{i,j} \tag{3·20}$$

我们有

$$\begin{aligned}\dot{T}_{ij}&=\dot{\tau}_{ij}-v_{i,k}\sigma_{kj}\\&=\tau^{\nabla}_{ij}+\sigma_{ik}W_{jk}+\sigma_{jk}W_{ik}-v_{i,k}\sigma_{kj}\\&=\tau^{\nabla}_{ij}-\sigma_{ik}(V_{jk}-v_{j,k})-\sigma_{jk}(V_{ik}-v_{i,k})-\sigma_{kj}v_{i,k}\end{aligned}$$

$$= \tau^{\nabla}_{ij} - \sigma_{ik}V_{jk} - \sigma_{jk}V_{ik} + \sigma_{ik}v_{j,k}$$

$$= \tau^{\nabla}_{ij} + \sigma_{ik}v_{j,k} - (\sigma_{ik}V_{jk} + \sigma_{jk}V_{ik}) \tag{3·21}$$

式（ε·21， ）两边同乘dt， 则到得

$$\Delta T_{ij} = {}^{J}(\Delta\tau_{ij}) + \sigma_{ik}\frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_k} - (\sigma_{ik}d_{kj} + \sigma_{jk}d_{ik}) \tag{3·22}$$

将式（3·22）代入式（3·9），我们得到了下述适时Lagrange描述的控制方程：

$$\int_V \left[{}^{J}(\Delta\tau_{ij})\delta d_{ij} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta\left(2d_{ik}d_{kj} - \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial x_i}\frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial x_j}\right)\right]dV$$

$$= \int_S (T_i + \Delta T_i)\delta(\Delta u_i)ds + \int_V \rho(F_i + \Delta F_i)\delta(\Delta u_i)dV$$

$$- \int_V \sigma_{ij}\delta d_{ij}dV \tag{3·23}$$

如果在上式中用相应材料的本构方程表达${}^{J}(\Delta\tau_{ij})$，例如对弹塑性材料采用式（3·13 ）即以$D^{EP}_{ijkl}d_{kl}$表示${}^{J}(\Delta\tau_{ij})$，并将域Ω_x离散化和引入插值函数，我们不难求得下列方程

$$[K]\{\Delta u^K\} = \{\Delta P\} \tag{3·24}$$

$$[K] = \int_V [B]^T[D^{EP}][B]dV - 2\int_V [B]^T[\sigma][B]dV$$

$$+ \int_V [C]^T[\sigma][C]dV \tag{3·25}$$

$$\{\Delta P\} = \int_V [N^T]\{f_i + \Delta f_i\}dV + \int_S [N]^T\{T + \Delta T\}ds$$

$$- \int_V [B]^T\{\sigma\}dV \tag{3·26}$$

式中矩阵$[N]$、$[B]$和$[C]$是由下述三式唯一定义的（其具体形式将取决于单元特性和插值函数）：

$$\{\Delta u\} = [N]\{\Delta u^K\} \tag{3·27a}$$

$$\{d\} = [B]\{\Delta u^K\} \tag{3·27b}$$

$$\{\Delta u_{i,j}\} = [C]\{\Delta u^K\} \tag{3·27c}$$

其中$\{\Delta u^K\}$是单元节点位移增量矩阵，$\{\Delta u\}$是单元内任一点的位移增量矩阵。若考虑动力学问题，则必须计及惯性力之影响，它可由式（3·23），从F_i分离出惯性力而求得，其有限元基本方程的形式变为

$$[M][\Delta \ddot{u}^K] + [K][\Delta u^K] = \{\Delta P\} \tag{3·28}$$

对于以初始构形为参考状态的Lagrange描述，我们可以从式（3·8）出发，得到相应的有限元基本方程。注意到

$$\Delta E_{IJ} = E^{t+dt}_{IJ} - E^{t}_{IJ} \tag{3·29a}$$

应用式(2·3·8)有

$$E_{IJ}^t = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_J^t}{\partial X_I} + \frac{\partial u_I^t}{\partial X_J} + \frac{\partial u_K^t}{\partial X_I} \cdot \frac{\partial u_K^t}{\partial X_J}\right]$$

$$E_{IJ}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial X_I}(u_J^t + \Delta u_J) + \frac{\partial}{\partial X_J}(u_I^t + \Delta u_I) + \frac{\partial}{\partial X_I}(u_K^t + \Delta u_K) \frac{\partial}{\partial X_J}(u_K^t + \Delta u_K)\right]$$

将上两式代入式(3·29 a)得

$$\Delta E_{IJ} = \Delta E_{IJ}^L + \Delta E_{IJ}^N \tag{3·29 b}$$

式中

$$\Delta E_{IJ}^L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial \Delta u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \cdot \frac{\partial \Delta u_K}{\partial X_J} + \frac{\partial u_K}{\partial X_J} \cdot \frac{\partial \Delta u_K}{\partial X_I}\right) \tag{3·29 c}$$

$$\Delta E_{IJ}^N = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta u_K}{\partial X_I} \cdot \frac{\partial \Delta u_K}{\partial X_J} \tag{3·29 d}$$

仍采用增量应力应变关系

$$\Delta S_{IJ} = D_{IJKL}\Delta E_{KL} \tag{3·30}$$

将式(3·30)和式(3·29 b)代入式(3·8)，我们得到Lagrange描述下的控制方程：

$$\int_{V_0} D_{IJKL}\Delta E_{KL}\delta \Delta E_{IJ} dV_0 + \int_{V_0} S_{IJ}\delta\Delta E_{IJ}^N dV_0$$
$$= \int_{V_0}(F_I + \Delta F_I)\delta \Delta u_I dV_0 + \int_{S_0}(T_I + \Delta T_I)\delta\Delta u_I ds_0 ,$$
$$- \int_{V_0} S_{IJ}\,\delta\Delta E_{IJ}^L dV_0 \tag{3·31}$$

同样将域Ω_{x_0}离散化并引入插值函数，将式(3·31)中各量用节点位移表示，并引入矩阵记法有

$$\{\Delta u\} = [N]\{\Delta u^K\} \tag{3·32a}$$
$$\{\Delta u_{I,J}\} = [C]\{\Delta u^K\} \tag{3·32 b}$$
$$\{\Delta E\} = ([B_L] + [B_N])\{\Delta u^K\} \tag{3·32 c}$$

则由式(3·31)和变分$\delta\{\Delta u^K\}$的任意性可得

$$([K_L] + [K_N] + [K_\sigma])\{\Delta u^K\} = \{\Delta P\} \tag{3·33}$$

式中

$$[K_L] = \int_{V_0}[B_L]^T[D][B_L]dV_0 \tag{3·34}$$

$$[K_N] = \int_{V_0}([B_L]^T[D][B_N] + 2[B_N]^T[D][B_L] + 2[B_N]^T[D][B_N])dV_0 \tag{3·35}$$

$$[K_\sigma] = \int_{V_0}[C]^T[S][C]dV_0 \tag{3·36}$$

$$\{\Delta P\} = \int_{V_0}[N]^T\{f_I + \Delta f_I\}dV_0 + \int_{S_0}[N]^T\{T + \Delta T\}ds_0$$
$$- \int_{V_0}[C]^T\{S\}dV_0 - \int_{V_0}[C]^T[S][C]dV_0 \tag{3·37}$$

式（3·33）及式(3·34)～(3·37)就是Lagrange描述法的有限单元法基本方程及刚度矩阵和载荷列阵。在导论中已谈及Nagtegaal等的计算，他们用的是适时Lagrange描述，这暴露了后者缺乏坚实的物理基础。采用Jaumann率虽可使本构方程建立在与连续介质共旋的座标轴上，但材料本身的旋转并非等价（试设想一受简单剪切大变形的单元体，材料本身显然只有错动而没有旋转，而在连续介质上固着的线元都旋转了）。为了排除这些困难，Lee,E.H.等提出了采用卸载后的中间构形作为参考构形，Dafafias提出了塑性旋度等概念，由于篇幅限制不能介绍，请读者参阅有关文献。

§7·4 超弹性材料

不考虑面矩时，局部形式的热力学第一定律（4:4·10）写为

$$\rho\frac{De}{Dt}=\sigma_{ij}V_{ij}+\rho\dot{q}-h_{i,i} \qquad (4·1a)$$

利用（1·6）和(3:3·2)可得

$$\sigma_{ij}V_{ij}=\frac{\rho}{\rho_0}S_{IJ}\frac{DE_{IJ}}{Dt} \qquad (4·2)$$

由此式（4·1）可化为

$$\frac{D\in}{Dt}=S_{IJ}\frac{DE_{IJ}}{Dt}-\frac{\rho_0}{\rho}h_{\alpha,\alpha}+\rho_0\dot{q} \qquad (4·1b)$$

式中$\in=\rho_0 e$为每单位变形前体积的内能。

令
$$\dot{Q}=\frac{DQ}{Dt}=-\frac{\rho_0}{\rho}h_{\alpha,\alpha}+\rho_0\dot{q} \qquad (4·3)$$

则(4·1b)式可写成有限变形下常用的形式

$$\frac{D\in}{Dt}=S_{IJ}\frac{DE_{IJ}}{Dt}+\frac{DQ}{Dt} \qquad (4·4a)$$

或
$$d\in=S_{IJ}dE_{IJ}+dQ \qquad (4·4b)$$

式中Q为单位变形前体积所吸收的热量，$S_{IJ}dE_{IJ}$为每单位变形前体积的变形元功。利用式(2:3·6)和(2:2·4b)，此变形元功又可写为：

$$S_{IJ}dE_{IJ}=S_{IJ}\frac{\partial E_{IJ}}{\partial x_{k,L}}dx_{k,L}$$

$$=S_{IJ}\frac{1}{2}(x_{k,I}\delta_{IL}+x_{k,I}\delta_{JL})du_{k,L}=S_{IL}x_{k,I}du_{k,L}$$

$$=T_{Lk}du_{k,L} \qquad (4·4c)$$

上面最后利用了式（1.8）。

引入单位变形前体积之Helmholtz自由能ψ（见(5:1·7)式）

$$\psi=\in-\eta\theta \qquad (4·5a)$$

对自由能求物质导数后将(4·4)式代入，并注意到对可逆系统由式(5:1·3)可得：

$$\frac{DQ}{Dt}=\theta\frac{D\eta}{Dt} \tag{4·5b}$$

即得

$$\frac{D\psi}{Dt}=S_{IJ}\frac{DE_{IJ}}{Dt}-\eta\frac{D\theta}{Dt} \tag{4·6}$$

式中η为每单位变形前体积所含的商，θ为热力学绝对温标。

现引入假设，对所考虑的材料及其热力学过程，存在比应变能函数W（以单位变形前体积计），它是相对于自然状态的Green应变张量E_{IJ}的函数

$$W=W(E_{IJ}) \tag{4·7}$$

且有

$$\frac{DW}{Dt}=S_{IJ}\frac{DE_{IJ}}{Dt} \tag{4·8}$$

满足这样要求的材料称为超弹性材料。式（4·8)表明，这种材料热力学过程的特点是变形功全部以应变能的形式贮存在弹性体内。

由（4·4a)和(4·6)式可见，在绝热条件下，应变能函数W即等于单位变形前体积的内能$\in$，而在等温条件下，W即为单位变形前体积之自由能ψ。这两种情况中，温度θ不显现在W中。但W也可存在于其它可逆的热力学过程中，只是W还应是温度θ的函数，即$W=W(E_{IJ},\theta)$。这一结论在第五章中已经得到过。

为简化表述，我们约定：任何对称张量分量的函数，例如W，写成对称分量的对称形式，即若自变量中有E_{IJ}项，也必须对称地有E_{JI}项，而不能将此两项合并为一项，而在对这些变量求偏导数时，对称分量将形式地处理为独立分量。例如，

$$W=aE_{11}^2+b(E_{21}+E_{21})^2$$

不能将E_{12}和E_{21}并写为 $W=aE_{11}^2+4bE_{12}^2$。

在对E_{12}求偏导数时，E_{12}和E_{21}都看成独立变量，因此求偏导时应是

$$\frac{\partial W}{\partial E_{12}}=2b(E_{12}+E_{21})$$

而不是

$$\frac{\partial W}{\partial E_{12}}=8bE_{12}$$

由此约定，我们有

$$\frac{\partial W}{\partial E_{IJ}}=\frac{\partial W}{\partial E_{JI}} \tag{4·9}$$

注意到

$$\frac{DW}{Dt}=\frac{\partial W}{\partial E_{IJ}}\cdot\frac{DE_{IJ}}{Dt} \tag{4·10}$$

将此式代入（4·8）得

$$\left(\frac{\partial W}{\partial E_{IJ}}-S_{IJ}\right)\frac{DE_{IJ}}{Dt}=0 \tag{4·11}$$

我们假定未给介质任一部分的变形以几何限制，例如不可压缩性的限制，则对可压缩的弹性

介质，各分量DE_{IJ}/Dt是彼此独立的变量。由于式（4·11）对应变率DE_{IJ}/Dt的任意值成立，我们有

$$S_{IJ}=\frac{\partial W}{\partial E_{IJ}}=2\frac{\partial W}{\partial C_{IJ}} \tag{4·12}$$

可见对超弹性材料，应力张量是有势的，它可由应变能函数W对应变分量的偏导数得到。

同样可写出Lagrange应力张量T_{Ij}和Euler应力张量σ_{ij}用应变能函数W表示的式子。由

$$\frac{\partial W}{\partial(\partial x_j/\partial X_I)}=\frac{\partial W}{\partial E_{PQ}}\cdot\frac{\partial E_{PQ}}{\partial(\partial x_j/\partial X_I)} \tag{a}$$

并忆及式(2·3·6)

$$\frac{\partial E_{PQ}}{\partial(\partial x_j/\partial X_I)}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial x_j/\partial X_I)}\left[\frac{\partial x_k}{\partial X_P}\frac{\partial x_k}{\partial X_Q}-\delta_{PQ}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial x_k}{\partial X_Q}\delta_{jk}\delta_{IP}+\frac{\partial x_k}{\partial X_P}\delta_{jk}\delta_{IQ}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_j}{\partial X_Q}\delta_{IP}+\frac{\partial x_j}{\partial X_P}\delta_{IQ}\right) \tag{b}$$

将(b)代入(a)可得

$$\frac{\partial W}{\partial(\partial x_j/\partial X_I)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_j}{\partial X_Q}\frac{\partial W}{\partial E_{IQ}}+\frac{\partial x_j}{\partial X_P}\frac{\partial W}{\partial E_{IP}}\right)=\frac{\partial W}{\partial E_{IP}}\frac{\partial x_j}{\partial X_P}$$

$$=S_{IP}\frac{\partial x_j}{\partial X_P} \tag{4·13}$$

再由（1·8）即得 $$T_{Ij}=\frac{\partial W}{\partial(\partial x_j/\partial X_I)} \tag{4·14}$$

这时W应表成变形梯度分量的函数。再由式（1·9）和（4·14）及式（1·10）和(4·12)可得

$$\sigma_{ij}=\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial X_P}\cdot\frac{\partial W}{\partial(\partial x_j/\partial X_P)} \tag{4·15}$$

$$=2\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial X_P}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial X_Q}\cdot\frac{\partial W}{\partial C_{PQ}} \tag{4·16}$$

式中C_{PQ}为Cauchy-Green张量分量。

下面的讨论限于各向同性超弹性材料

设想物体不动，而只是变形场整体发生了旋转，若旋转前某质点邻域的变形场以右Cauchy-Green张量$\mathbf{C}$表示，则旋转后之变形场为$\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{QCQ}^T$,这里$\mathbf{Q}$为正交张量。对各向异性材料，经变形场旋转后，应变能函数$W=W(\overline{\mathbf{C}})$之值要改变。而各向同性材料要求在变形场旋转后，应变能函数之值不变，即

$$W(\mathbf{C})=W(\overline{\mathbf{C}})=W(\mathbf{QCQ}^T) \tag{4·17}$$

即W作为C_{IJ}的函数在任何正交坐标系中取同一形式，故W是张量$\mathbf{C}$的不变量，而$\mathbf{C}$的任何不变量，都可用$\mathbf{C}$的三个应变不变量I_1、I_2和I_3表出，故对各向同性材料有

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \tag{4·18}$$

式中，

$$I_1 = C_{KK}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(C_{KK}C_{LL} - C_{KL}C_{KL}) \tag{4·19}$$

$$I_3 = \frac{1}{6}e_{IJK}e_{PQR}C_{IP}C_{JQ}C_{KR}$$

$$= \frac{1}{6}(2C_{IJ}C_{JK}C_{KI} - 3C_{IJ}C_{IJ}C_{KK} + C_{II}C_{JJ}C_{KK})$$

且由于左 Cauchy-Green 张量**B**和**C**具有相同的主值，故**B**与**C**的不变量相同（参见第二章§2·2）。

利用 $\frac{\rho_0}{\rho} = J = \det \mathbf{F} = (\det \mathbf{C})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{I_3}$ （4·20）

式（4·16）可写为

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}}x_{i,P}x_{j,Q}\frac{\partial W}{\partial C_{PQ}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{I_3}}x_{i,P}x_{j,Q}\left[W_1\frac{\partial I_1}{\partial C_{PQ}} + W_2\frac{\partial I_2}{\partial C_{PQ}} + W_3\frac{\partial I_3}{\partial C_{PQ}}\right] \tag{4·21}$$

式中

$$W_1 = \partial W/\partial I_1, \quad W_2 = \partial W/\partial I_2, \quad W_3 = \partial W/\partial I_3 \tag{4·22}$$

为不变量I_1、I_2和I_3的函数。

由式（4·19），我们有

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_{PQ}} = \frac{\partial}{\partial C_{PQ}}(C_{KK}) = \delta_{PQ} \tag{4·23 a}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial C_{PQ}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial C_{PQ}}(C_{KK}C_{LL} - C_{KL}C_{KL}) = I_1\delta_{PQ} - C_{PQ} \tag{4·23 b}$$

为求$\partial I_3/\partial C_{PQ}$，对**C**应用Cayley—Hamilton定理，得

$$\mathbf{C}^3 - I_1\mathbf{C}^2 + I_2\mathbf{C} - I_3\mathbf{I} = 0$$

或

$$C_{PR}C_{RS}C_{SQ} - I_1C_{PR}C_{RQ} + I_2C_{PQ} - I_3\delta_{PQ} = 0 \tag{4·24}$$

上式对PQ缩并得

$$3I_3 = C_{RS}C_{ST}C_{TR} - I_1C_{RS}C_{RS} + I_2C_{KK}$$

上式对C_{PQ}求导并利用式（4·23 a · b）和式（4·19）的第二式得

$$\frac{\partial I_3}{\partial C_{PQ}} = I_2\delta_{PQ} - I_1C_{PQ} + C_{PR}C_{RQ} \tag{4·25}$$

注意到

$$x_{i,P}x_{j,Q}\delta_{PQ} = x_{i,P}x_{j,P} = B_{ij}$$

$$x_{i,P}x_{j,Q}C_{PQ} = x_{i,P}x_{j,Q}x_{k,P}x_{k,Q} = B_{ik}B_{kj}$$

$$x_{i,P}x_{j,Q}C_{PR}C_{RQ} = B_{il}B_{lk}B_{kj}$$

得 $$x_{i,P}x_{j,Q}\frac{\partial I_3}{\partial C_{PQ}}=I_2B_{ij}-I_1B_{ik}B_{kj}+B_{il}B_{lk}B_{kj}$$

对**B**利用Cayley-Hamilton定理， 得到同式(4·24)相似的式子，解出$B_{il}B_{lk}B_{kj}$代入上式，即得

$$x_{i,P}x_{j,Q}\frac{\partial I_3}{\partial C_{PQ}}=I_3\delta_{ij} \tag{4·26}$$

将（4·23a,b）、（4·26）代入（4·21），得到

$$\sigma_{ij}=\frac{2}{\sqrt{I_3}}[I_3W_3\delta_{ij}+(W_1+W_2I_1)B_{ij}-W_2B_{ik}B_{kj}] \tag{4·27}$$

或写为

$$\boldsymbol{\sigma}=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{B}+a_2\mathbf{B}^2 \tag{4·28}$$

式中 $$a_0=2\sqrt{I_3}W_3\quad a_1=\frac{2}{\sqrt{I_3}}(W_1+I_1W_2),\quad a_2=-\frac{2}{\sqrt{I_3}}W_2 \tag{4·29}$$

为不变量I_1、I_2、I_3的函数。

对**B**用Cayley-Hamilton定理，有

$$\mathbf{B}^3-I_1\mathbf{B}^2+I_2\mathbf{B}-I_3\mathbf{I}=0$$

由此得

$$\mathbf{B}^2=I_1\mathbf{B}-I_2\mathbf{I}+I_3\mathbf{B}^{-1} \tag{4·30}$$

代入（4·28）

$$\boldsymbol{\sigma}=x_0\mathbf{I}+x_1\mathbf{B}+x_{-1}\mathbf{B}^{-1} \tag{4·31}$$

式中，x_0、x_1、x_{-1}为不变量I_1、I_2和I_3的函数：

$$x_0=\frac{2}{\sqrt{I_3}}(I_2W_2+I_3W_3)\quad x_1=\frac{2}{\sqrt{I_3}}W_1$$

$$x_{-1}=-2\sqrt{I_3}W_2 \tag{4·32}$$

于是，对可压缩的各向同性弹性体，在有限变形条件下，本构关系的最一般形式即为（4·28）或（4·31）式。

考虑材料不可压缩情况，则由式(4·1·6)可见此时速度场之散度为零，即

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=V_{ii}=0 \tag{4·33}$$

此关系可用DE_{IJ}/Dt来表示，根据(3·3·2)式，我们有

$$\frac{D}{Dt}E_{IJ}=V_{pq}\frac{\partial x_p}{\partial X_I}\cdot\frac{\partial x_q}{\partial X_J}$$

此式两边用$\frac{\partial X_I}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial X_J}{\partial x_S}$乘，即得

$$V_{rs}=\frac{DE_{IJ}}{Dt}\cdot\frac{\partial X_I}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial X_J}{\partial x_s}$$

由此，不可压缩条件可写成

$$\frac{DE_{IJ}}{Dt}\cdot\frac{\partial X_I}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial X_J}{\partial x_r}=0 \tag{4·34a}$$

或

$$\frac{DE_{IJ}}{Dt}C_{IJ}^{-1}=0 \tag{4·34b}$$

上式表示了不可压缩的条件，它表明各分量 DE_{IJ}/Dt 间不是互相独立的，因此不能再由（4·11）式得出（4·12）的本构方程。比较（4·11）和（4·34b）只能得出（4·11）的括号因子应正比于 C_{IJ}^{-1} 的结果，即

$$S_{IJ}=\frac{\partial W}{\partial E_{IJ}}-PC_{IJ}^{-1} \tag{4·35}$$

式中 P 为任意标量。

再由式（1·10）和（4·35），在材料不可压缩的情况下（$\rho=\rho_0$，$J=1$）可得

$$\sigma_{ij}=x_{i,P}x_{j,Q}\left(\frac{\partial W}{\partial E_{PQ}}-PX_{P,k}X_{Q,k}\right)$$

$$=x_{i,P}x_{j,Q}\frac{\partial W}{\partial E_{PQ}}-P\delta_{ij} \tag{4·36}$$

$$=2x_{i,P}x_{j,Q}\frac{\partial W}{\partial C_{PQ}}-P\delta_{ij} \tag{4·37}$$

在材料不可压缩情况下，$J=\det\mathbf{F}=1$，由此 $I_3=\det\mathbf{C}=(\det\mathbf{F})^2=1$，故 W 仅依赖于 I_1 和 I_2。由于（4·36）式中，P 是任意的标量，故（4·31）中带单位张量 $\mathbf{I}$ 的项的系数 $\varkappa_0$ 即可看成 $-P$，于是（4·31）式的本构方程可简化为

$$\boldsymbol{\sigma}=-P\mathbf{I}+2W_1\mathbf{B}-2W_2\mathbf{B}^{-1} \tag{4·38}$$

于是，对可压缩的超弹性材料，知道了应变能函数，则由本构方程应力可以完全确定。而对不可压缩的超弹性材料，由本构方程应力只能确定到差一任意标量的程度。

作为这类应变能函数的一个例子，考虑橡胶材料。它可看成不可压缩材料，且实践证明把（4·38）中 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}^{-1}$ 前的系数看作常数已具有工程上的精度。考虑到在自然状态下，$x_i=X_i$，故在自然状态下有 $B_{ij}=C_{ij}=\delta_{ij}$，并由式（4·19）得 $I_1=3$，$I_2=3$ 及 $I_3=1$。由于设应变能函数在自然状态为零，则可选应变能函数如下

$$W=\alpha(I_1-3)+\beta(I_2-3) \tag{4·39}$$

式中 α、β 为常数。由式（4·22）及（4·39）得橡皮的本构方程为

$$\boldsymbol{\sigma}=-P\mathbf{I}+2\alpha\mathbf{B}-2\beta\mathbf{B}^{-1} \tag{4·40}$$

式(4·39)虽然简单，但并不总能解释在所有的 I_1 和 I_2 值下由硫化橡胶实验得到的数据，根据Rivlin和Saunders实验（1951），在某些伸长范围，提出了能更准确描述硫化橡胶力学性能的形式

$$W=\alpha(I_1-3)+f(I_2-3)$$

式中 f 为 (I_2-3) 的函数。一些作者曾考虑了各种不同的 f 的显式[8]，此处不再述及。

习　题

7·1 各向同性有限弹性理论的本构方程可写成

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{B} + \gamma \mathbf{B}^2 \qquad ①$$

式中$\boldsymbol{\sigma}$为Euler应力张量，$\mathbf{B}$为左Cauchy-Green张量，$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$，而

$$\alpha = 2\sqrt{I_3} W_3 \quad , \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{I_3}}(W_1 + I_1 W_2),$$

$$\gamma = -\frac{2}{\sqrt{I_3}} W_2 \qquad ②$$

式中，$W_1 = \partial W/\partial I_1$，$W_2 = \partial W/\partial I_2$，$W_3 = \partial W/\partial I_3$。$W$为应变能函数，$I_1$，$I_2$和$I_3$为$\mathbf{B}$的三个不变量。应变能函数的存在，表示$\alpha$、$\beta$、$\nu$间存在一定的关系。试建立$\alpha$，$\beta$，$\gamma$间的三个关系式。

提示：由②解出W_1、W_2和W_3，然后由$\partial W_1/\partial I_2 = \partial W_2/\partial I_1$，……等可建立$\alpha$、$\beta$、$\gamma$间的三个关系式。

7·2 设有均匀变形

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2, \quad x_3 = \lambda_3 X_3 \qquad ③$$

式中λ_i为常数。

(1) 试证：若不存在体力，则③为有限弹性材料允许的变形。

提示：先由本构方程①得出应力为常数，因此满足无体力的平衡方程。

(2) 对不可压缩材料

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \beta \mathbf{B} + \nu \mathbf{B}^2 \qquad ④$$

式中P为静压力，且$I_3 = 1$。试证

$$\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}$$

若$\sigma_{33} = 0$，指出，σ_{11}和σ_{22}可用λ_1、λ_2表示如下：

$$\sigma_{11} = \beta[\lambda_1^2 - (\lambda_1\lambda_2)^{-2}] + \nu[\lambda_1^4 - (\lambda_1\lambda_2)^{-4}]$$

$$\sigma_{22} = \beta[\lambda_2^2 - (\lambda_1\lambda_2)^{-2}] + \nu[\lambda_2^4 - (\lambda_1\lambda_2)^{-4}]$$

7·3 不可压缩弹性材料的等截面杆，设沿杆轴（取为x_1轴）方向为均匀伸长，伸长比为λ，在该方向之应力为σ_{xx}，其余方向之应力分量为零。试由对称和不可压缩理由指出：

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1/\sqrt{\lambda}$$

且应力σ_{xx}由下式给出

$$\sigma_{xx} = \beta(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + \nu(\lambda^4 - \lambda^{-2})$$

而轴力为

$$T_x = A_0[\beta(\lambda - \lambda^{-2}) + \nu(\lambda^3 - \lambda^{-3})]$$

式中A_0为初始横截面积。

7·4 弹性材料受均匀剪切变形

$$x = X + kY \quad , \quad y = Y \quad , \quad z = Z \tag{5}$$

式中k为常数。

（1）试求**B**和$\mathbf{B}^2$，并指出**B**的不变量为

$$I_1 = I_2 = 3 + k^2 \quad , \qquad I_3 = 1$$

（2）试指出：$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$，而$\sigma_{11}$，$\sigma_{22}$，$\sigma_{33}$为$k$的偶函数，$\sigma_{12}$为$k$的奇函数，且$\sigma_{12}$，$\sigma_{11}$，$\sigma_{22}$间存在关系式：$(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = k\sigma_{12}$，而与函数$\alpha$，$\beta$和$\nu$无关。

第八章　不可逆热力学

众所周知粘弹性、塑性和粘塑性变形，牛顿流体与非牛顿流体的流动，传热和传质现象等都是不可逆的热力学过程。如果不从不可逆热力学的观点去研究它们，而只是从纯力学或机械能守恒及损失的观点去分析，就难以深入过程的物理本质建立起现实的模型。我们研究不可逆热力学就是要明确不可逆过程必须满足的约束条件和基本定律，从而找到建立本构方程的准绳和方法。但是当人们企图很严密地去进行这一工作时，一个意想不到的困难却来自热力学的本身。事实上热力学并不象理论物理学的其它分支那样，具有无懈可击的严格性，这导致了近二十年来对热力学基础的研究相当活跃的状况，问题的焦点则如 Kestin 和 Rice所说[49]："扩展热力学到不可逆过程的核心困难是熵的存在以使第二定律第二部分获得明确物理意义的问题"。在第五章中，我们介绍过的关于熵的概念，都是从传统热力学中借用过来的，它在不可逆过程中的存在性是作为假设而成立的[27]。本章我们将[18]中提出的状态空间的概念加以强调和应用，把连续介质微系统的不可逆热力学过程定义为跨越不同ε_T子空间，不断克服广义内摩擦力以改变连续介质内部组织结构状态，并不断耗散能量的变化过程，并按照Valanis提出的第一定律的可积性和偏可积性的方法，以Carathéodory 数学定理及公理二表达的物理本质为基础证明了熵在可逆系统与不可逆系统中作为状态函数的存在[19]。在证明中抛弃了经典热力学中关于热力学过程必须是静态和拟静态的约束；也由于强调不可逆过程某一时刻的热力学状态由那一时刻座落的子空间获得定义的思想，从而避开了把定义空间与内变量实际演变路径混淆起来的观点。

本章通过对熵作为状态函数存在的证明，引进了Helmholtz自由能函数，并得到了一系列重要的推论；在得到 Clausius-Duhem 不等式之后，引入了广义内摩擦力与自由能密度ψ变化率之间的关系，并由此得到了以内变量表示的 Clausius-Duhem 不等式的派生形式；在讨论不可逆熵产的基础上还讨论了Onsager现象学原理。本章不仅是对第四和第五章介绍的可逆系统热力学概念的深化，更重要的是为以后几章的学习提供必要的理论基础。

§8·1 热力学状态变量和内变量、ε_{Tq}空间及其子空间

连续介质域Ω_x内的局部微系统ω_x是今后我们研究的基本系统，如无特别声明该微系统将简称为系统，连续介质热力学的一个最基本和最重要的假设是关于物质是连续的假设，这一强有力的概念允许我们将热力学系统ω_x的尺寸缩减至无限小，以便使该系统中的物理量（如质量密度与内能等）在很大的精度范围内可看成是均匀的。这里要说明的是这种均匀显然是从宏观意义上而不是从微观的角度上讨论的。另外要着重指出的是该微系统不是一个点，它应包含大量的分子，以便从热力学的观点来看有确定的物理的内涵；但它又是足够的小，以致于从场的分析的观点来看，它的不均匀性的影响是很小的。这种宏观无限小，微观无穷大的模型表面上看有些奇怪，实际上是一个很有用的研究连续介质的热力学模型。

下面我们先介绍内变量的概念，然后讨论ε_{Tq}空间及其子空间ε_T。

Ⅰ. **内变量**

内变量：要求与基本状态变量现时值的一个集合一起去唯一地决定不可逆系统状态的，不一定能观察但是独立的变量将被称之为内变量。它将被记为q_a($a=1,2,\cdots m$)。这里要注意的是，从广义的内变量的概念来看，它们之间可能不独立，但这并不会影响我们的研究，事实上如果在n个内变量中有$n-m$个关系式相关联，则总可以得到m个独立的内变量。内变量的具体物理含义可能是非常广泛的，它取决于具体材料在特定条件下的内部组织和结构状况。总的来说它可能代表材料内部的某种运动或内部结构的重新排列，例如对金属来说，它可能代表晶格的位错、歪扭和再结晶等表征多晶体内部组织的种种演化和发展。从概念上说，既然内变量的变化表征着材料内部的变化，那么它的完整集合就足以与基本状态变量一起去描述材料内部的组织和结构状态，因此我们可以如[19]中那样写出下述公理

公理一　一个基本状态变量和内变量的完整集合总是存在的，这一集合的现时值将唯一地决定系统的当前的不可逆热力学状态。

上述完整集合的选择并不是唯一的，它决定于力学模型的层次、实际系统的复杂程度，和需要在那种精度和变形范围内去描述该系统的热力学状态等等。对建筑在现象学上的模型来说，重要的是如何用尽量少的内变量去宏观平均地表征内部结构变化对应力应变关系的影响，并由实验去决定所引入的宏观参数。当然如果能够与微观的分析（如金相学的或土壤学的组织分析）结合起来搞清其机制，则对内变量及其演化规律的研究无疑是重要的，但这并不意味着它是进行内变量分析的先决性条件。这是因为所选择的模型有可能通过宏观的试验来加以检验与修正。

Ⅱ. **ε_{Tq}空间及其子空间ε_T**

下面我们分别将不可逆系统与可逆系统热力学状态的描述与引入的ε_{Tq}空间及其子空间ε_T联系起来。

对可逆系统，一个由应变分量x_i(或$C_{\alpha\beta}$)和温度T组成的七维状态空间（简称为ε_T空间）就足以唯一地描述系统的热力学状态。设p是该空间中的一点，则我们有内能$\in$与应力$\tau_{\alpha\beta}$的下述表达式

$$\in=\in(p)=\in(x_i,\ T) \qquad (1\cdot1)$$

$$\underset{\sim}{\tau}=\underset{\sim}{\tau}(p)=\underset{\sim}{\tau}(x_i,\ T) \qquad (1\cdot2)$$

式中符号～记二阶张量。

对不可逆系统，一个由应变分量、温度和m个独立的内变量q_a组成的($m+7$)维状态空间（简称ε_{Tq}空间）被用来唯一地描述该系统的不可逆热力学状态。具体地说，设p是该空间中的一点，则存在内能$\in$与应力$\underset{\sim}{\tau}$的下述表达式

$$\in=\in(p)=\in(x_i,\ T,q_a) \qquad (1\cdot3)$$

$$\underset{\sim}{\tau}=\underset{\sim}{\tau}(p)=\underset{\sim}{\tau}(x_i,T,q_a) \qquad (1\cdot4)$$

非常明显和重要的是：ε_T是ε_{Tq}空间的一个子空间，对任一给定的内变量组，就对应着材料内部组织的一个确定的状态，也就存在着一个相应的子空间ε_T。p点在该子空间中的运动如果是在绝热条件下进行的，就将对应着系统在相应的内部组织状态下的一个特定的可逆系统

的变化（注意在该子空间内的运动不产生内部组织结构的耗散）。但是当p点从一个ε_T子空间到另一个ε_T子空间变化时，性质就根本不同，即其内部组织状况将产生不可逆的变化，而且这种变化将消耗有用的能量来提供克服如内摩擦等所需要的功耗。这样我们就可将不可逆过程定义成跨越不同ε_T子空间、不断耗散能量以不断改变内部组织结构状态的运动过程。

§8·2 第一定律在连续介质初始构形中表达的简化形式、理想气体

在转入讨论熵作为状态函数存在这一连续介质热力学的核心问题之前，为使以后的证明简洁，有必要对热力学第一定律在连续介质中的表达式（4:4·10）进行简化，并从理想气体的分析出发提出有关证明的方法论问题。

若忽略面矩的作用，并注意到式(7:1·10)、(3:3·2)可得

$$\sigma_{ij}V_{ij}=\frac{\rho}{\rho_0}S_{IJ}\frac{D}{Dt}\mathrm{E}_{IJ}$$

由此，式(4:4·1)可在初始构形中写出为：

$$\dot{\in}=\frac{1}{2}S_{IJ}\dot{C}_{IJ}-\overline{h_{\alpha,\alpha}}+\dot{\overline{q}} \tag{2·1}$$

式中$\in$——以未变形前单位体积计算的能量密度；ρ_0和ρ分别是最初的和当时的质量密度；$\overline{h_\alpha}$（等于$\frac{\rho_0}{\rho}h_\alpha$）是物质构形中以每单位未变形的面积计的热流矢量；而$\overline{q}$（等于$\rho_0 q$）则是相应的每单位未变形体积计算的热供应量；C_{IJ}则为右柯西格林（Cauchy-Green）应变张量，它与格林应变张量E_{IJ}的关系为：

$$\mathrm{E}_{IJ}=\frac{1}{2}(C_{IJ}-\delta_{IJ}) \tag{2·2}$$

δ_{IJ}是Kronecher符号。为了简化下面的讨论，采用下述矢量记号

$$(S_{11},S_{12}/\sqrt{1/2},\ S_{13}/\sqrt{1/2},\ S_{22},\ S_{23}/\sqrt{1/2},\ S_{33})=(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6) \tag{2·3}$$

$$\frac{1}{2}\left(C_{11},\ C_{12}/\sqrt{1/2},\ C_{13}\Big/\sqrt{\frac{1}{2}},\ C_{22},\ C_{23}\Big/\sqrt{\frac{1}{2}},\ C_{33}\right)=(x_1,x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6) \tag{2·4}$$

以及

$$-\overline{h_{\alpha,\alpha}}+\dot{\overline{q}}\equiv\dot{Q} \tag{2·5}$$

上式的$\dot{Q}$已在式(7:4·3)给过，且方程（2·1）可归结为(7:4·4 a)，若进一步用式（2·3）与（2·4）的记号，则（2·1）还可写成：

$$\dot{\in}=X_i\dot{x}_i+\dot{Q} \tag{2·6a}$$

或写成

$$d\in-X_i dx_i=dQ \tag{2·6b}$$

要记住的是X_i与x_i分别具有应力与应变的意义及相应的因次。（2·6）式就是下面经常要用

到的热力学第一定律的形式，它表达了系统ω_x能量守恒的必要与充分条件。如在推导式(4:4·10)和这里的简化过程表明的方程，(2·6)无论对"拟静态的"、"动态的"、"可逆的"或"不可逆的"过程都是成立的。强调这一点的原因是因为方程(2·6)在证明熵的存在性时将起着关键性的作用。

下面我们以理想气体为例对下节中将要讨论的熵作为状态函数的存在性问题作些说明。如众所周知的理想气体的内能密度是温度的状态函数。设C_V为定容下的比热，则有

$$\in = C_V T \tag{2·7}$$

气体的压力则是它的体积和温度的状态函数，并由下述的"本构方程"加以描述

$$PV = RT \tag{2·8}$$

式中R是决定于参考构形的常数。显然压力p和内能$\in$是V和T的状态函数，因而理想气体是可逆系统，理想气体的热力学第一定律可以写为

$$C_V dT + pdV = dQ \tag{2·9}$$

将式(2·6b)与(2·9)类比，可见气体中的压力p对应于固体力学中的X_i，并相差一负号。由于Q是过程量而不是状态量，因而对dQ记号的含义要特别小心，它是这样定义的，即对任给的一个正数δ，不管它如何小，我们总可以找到一个足够短的时间dt，使得

$$|dQ - \dot{Q}dt| < \delta \tag{2·10}$$

即dQ是一个无限小的过程量的增量（注意：如果过程量的增量是有限的，则将如(4:4·2)式那样，采用记号"δ"而不用"d"）不是一个全微分。这一点很容易由构造一个起点与终点相同的热力学循环，并采用(2·9)式来确证

$$\oint dQ \neq 0 \tag{2·11}$$

因而一般说热Q不是系统的状态函数。非常有趣的是dQ和温度的组合却构成了一个状态函数的全微分。这一结论是对热力学第一定律的等式左边的表达式进行积分得到的。事实上利用本构方程(2·8)式，则(2·9)式可以化为

$$C_V dT/T + RdV/V = dQ/T \tag{2·12}$$

直接验证就可确信上式左边是函数η的全微分

$$\eta = \log(T^{C_V} V^R) + \eta_0 \tag{2·13}$$

因而由式(2.12)有

$$d\eta = d\theta/T \tag{2·14}$$

即$d\theta/T$是V和T的状态函数的全微分。这个状态函数就是下式表达的熵

$$\int \frac{d\theta}{T} = \eta(T, V) \tag{2·15}$$

以上我们看出了由理想气体的内能和压力是V和T的状态变量的函数出发引出第一定律局部形式的可积性，进而导致另一状态函数熵建立的过程。当我们试图将这种方法推广时，我们面临着两个很有兴趣的难题。第一个难题是，对一般的可逆与不可逆系统，我们并不知道它的本构关系的显式(它是待求的)，那么如何从数学上讨论形如第一定律等式左边那样的表达式的可积性呢？第二个难题是在最终达到热力学第一定律的可积性时，什么样的物理规律必须考虑，以揭示其隐含在数学形式下的深刻的物理背影呢？第一个问题即问题的数学方面，它

是由数学家Carathéodory于1919年解决的。第二个问题即问题的物理方面，对可逆系统来说，是由所谓的Carathéodory猜想来解决的，而对于不可逆系统只有在引入内变量的概念，并对不可逆系统在远离其原始构形后的热力学状态有了明确的定义之后，才在最近有了比较明确的认识。

§8·3 Carathéodory定理与熵作为状态函数的存在

让我们从下述重要的数学定义和定理开始。

I．Pfaffy型和Carathéodory定理

设y空间是n个独立变量y_i的n维欧几里德空间，c是该空间中的一条曲线，它以参数形式给出如下

$$y_i = y_i(t) \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3·1}$$

式中$y_i(t)$是t之连续函数，曲线c的一个无限小的弧长由下式给出

$$ds = (\dot{y}_i \dot{y}_i)^{\frac{1}{2}} dt \tag{3·2}$$

长为ds并切于该曲线的矢量的分量是dy_i，显然

$$dy_i = y_i(t + \Delta t) - y_i(t) \tag{3·3}$$

设$Y_i(y_K)$是n个y_K的单值函数，并设dQ是标量微分形式$Y_i dy_i$的数值，即

$$Y_i dy_i = dQ \tag{3·4}$$

显然当所有的dy_i趋于零时dQ趋于零。由此(3·4)式定义的微分型dQ被称之为Pfaffy 型。如果存在函数$\theta(y_K)$和$\eta(y_K)$使得 $\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} Y_i dy_i$等于函数$\eta(y_K)$的全微分，即如果成立下述等式

$$\frac{1}{\theta(y_i)} Y_i dy_i = d\eta(y_i) \tag{3·5}$$

则此Pfaffy型被说成是可积的，在这种情况下

$$Y_i = \theta \partial\eta/\partial y_i \tag{3·6}$$

以及

$$d\eta(y_i) = dQ/\theta \tag{3·7}$$

进而如果c是y_i空间中单值于区域中的封闭曲线，则有

$$\oint_C dQ/\theta = 0 \tag{3·8}$$

函数θ被称为Pfaffy型的积分分母。

尽管对于二维的Pfaffy型来说，总可以找到一个积分分母θ使之成为可积的（例如上节对理想气体写出的热力学第一定律等式左边的表达式就是一个二维的Pfaffy型）。但对于多维的情况却并非如此，对于它们可积性的必要和充分条件是由Carathéodory 于 1919 年 给出的，它可表述如下

Carathéodory定理　Pfaffy微分型可积的必要和充分条件是，在n维y_i空间中的一p点的

邻域中存在另一点p'，它不能与p用下述方程的解表达的几何图形联结起来，

$$Y_i dy_i = 0 \tag{3·9}$$

这一数学定理的意义是很深远的。

Ⅱ．可逆系统中熵作为状态函数的存在

在上节中我们已将热力学第一定律的增量形式表示为

$$d\in - X_i dx_i = dQ \tag{3·10}$$

不难看出方程（3·10）的左边的确是一个Pfaffy型，它热力学地表达了系统内能密度的增量减去在系统上作的功的增量。事实上用式（1·1）对$\in$求全微分，并代入(2·6b)式我们得到

$$\left[\frac{\partial\in}{\partial x_i} - X_i\right]dx_i + \frac{\partial\in}{\partial T}dT = dQ \qquad i = 1, 2, \cdots, 6 \tag{3·11}$$

将（3·11）式与（3·4）式的左边相比较，可确认它是n为7的ε_7空间中的Pfaffy型，且有

$$Y_i = \frac{\partial\in}{\partial x_i} - X_i \quad y_i = x_i \qquad i = 1, 2, \cdots, 6 \tag{3·12}$$

$$Y_7 = \frac{\partial\in}{\partial T} \qquad y_7 = T \tag{3·13}$$

按照Carathéodory定理，等式（3·11）左边给出的Pfaffy型在下述条件下是可积的，即在七维ε_7空间中，在p_0点邻域内总存在一点p'，它不能通过下述方程的解表达的几何图形联结起来

$$\left[\frac{\partial\in}{\partial x_i} - X_i\right]dx_i + \frac{\partial\in}{\partial T}dT = 0 \tag{3·14}$$

但由（3·11）式我们确认（3·14）式在热力学上意味着是由$dQ = 0$表这的一个绝热的和可逆的过程，因而如果（3·11）式左边可积则要求证明从p_0点表述的热力学状态出发，不可能沿一个绝热的过程到达上述的点p'。这一证明不是由数学推导能够完成的，而必须认真研究和总结自然界的规律。其答案最早是以Carathéodory猜想形式给出，在本章中，我们则采用在[18]中引入的下述公理。

公理二　对于所有绝热的和可逆的离开p_0点的偏移，温度的增量ΔT是在p_0处的应变和温度状态及应变增量的函数，即有

$$\Delta T = f(C_{\alpha\beta}, \ T, \ \Delta C_{\alpha\beta}) \tag{3·15}$$

或

$$\Delta T = f_1(x_i, \ T, \ \Delta x_i) \tag{3·16}$$

该公理的物理意义是：在绝热过程中可逆系统在p_0处的温度增量不能独立控制，它必定是应变增量$\Delta C_{\alpha\beta}$（或Δx_i）的函数。而该公理的几何意义则在于在七维的ε_7空间中定义了一个过p_0点的超曲面，所有通过p_0发出的绝热路径都心须位于该曲面上。这样p_0的邻域内就必然存在一点p'，它并不位于该超曲面上，因而不能通过一个绝热的和可逆的过程将p_0与p'联结起来，所以(3·11)式左边是可积的，即存在一个积分分母$\theta(x_i, \ T)$使得下式成立

$$\left[\frac{\partial\in}{\partial x_i} - X_i\right]dx_i + \frac{\partial\in}{\partial T}dT = \theta d\eta \tag{3·17}$$

以及

$$dQ = \theta d\eta \tag{3·18}$$

这里$d\eta$是η的全微分。后者是x_i与T的状态函数，被称之为熵。由（3·18）式容易得到下

述关系式

$$\partial \in /\partial x_i - X_i = \theta \partial \eta / \partial x_i \tag{3·19}$$

$$\partial \in /\partial T = \theta \partial \eta / \partial T \tag{3·20}$$

让我们用下述关系作空间的点至其本身的点的变换，即

$$x_i = x_i \tag{3·21}$$

$$\theta = \theta(T, x_i) \tag{3·22}$$

这样该空间的独立变量就成了x_i与θ，而θ是热力学温标。由（3·19）和（3·20）易于得到

$$\partial \in /\partial x_i - \theta \partial \eta / \partial x_i = X_i \tag{3·23}$$

$$\partial \in /\partial \theta = \theta \partial \eta / \partial \theta \tag{3·24}$$

式中$\in$和η是x_i与θ的函数，进而如果我们引入另一个称之为Helmholtz自由能密度的状态函数ψ使得$\psi = \in - \eta\theta$ (3·25)

那末由式(3·23)与(3·24)得到

$$X_i = \partial \psi / \partial x_i |_\theta \tag{3·26}$$

$$\eta = -\partial \psi / \partial \theta |_{\underset{\sim}{C}} \tag{3·27}$$

这里ψ为单位未变形体积所具有之自由能。利用式(2·3)和(2·4)，式(3·26)可变为有限变形下的应力计算公式

$$S_{IJ} = 2\partial \psi / \partial C_{IJ} |_\theta \tag{3·28a}$$

或

$$S_{IJ} = \partial \psi / \partial E_{IJ} |_\theta \tag{3·28b}$$

在小变形下，(3·28 b)式回到了(5:1·11)，它表明在等温下即使是有限变形，自由能ψ也是应力势函数，在一般情况下由于ψ还和温度有关，它可看或广义势函数。在§7·4中我们已知在等温条件下Helmholtz自由能ψ就是超弹性材料的应变能函数，它的特性我们在那里已作了详细讨论。也很容易由此得出下面的非常重要的关系

$$\dot{\psi} = X_i \dot{x}_i - \eta \dot{\theta} \tag{3·29}$$

它意味着在等温条件下（$\dot{\theta} = 0$），ψ是能够转化为功的系统的总能量。

我们用下面的话来总结上述结果：

如果系统的内能$\in$和作用于系统上的“力”（应力）X_i是“应变”x_i（使得$X_i \dot{x}_i = \dot{W}$参见(2·6a)）和温度θ的函数，那么作为公理二和Carathéodory定理的结果，这里存在着一个称之为熵的状态函数$\eta(x_i, \theta)$使得它的全微分由下式表示，

$$d\eta = dQ/\theta$$

上述熵的存在的证明的有趣之处在于，我们没有在任何地方引入热力学过程必须是拟静态的或必须表成相继平衡态。

Ⅲ. **不可逆系统中熵作为状态函数的存在**

对于这样的系统，当然第一定律仍旧适合，即

$$d\in - X_i dx_i = dQ \tag{3·30}$$

但是热力学第一定律的可积性及其相应的物理背景，长期以来并未对不可逆系统建立起来。下面按照〔19〕的方法用Pfaffy型在ε_T空间中的局部可积性来证明熵作为状态函数的存在性。对不可逆系统，我们有方程(1·3)和(1·4)，它十分清楚地表明，应力张量和内能在t

时刻的值 $\underset{\sim}{\tau}(t)$和$\in(t)$由应变、温度和内变量组在 t 时刻的值$x_i(t)$,$T(t)$和$q_a(t)$（$a=1, 2, \cdots, m$）所完全决定。这里我们要注意的是，如果象通常那样限于从外变量（温度、应变）角度来考虑问题，则由于载荷历史不同，即使对同样的应变与温度，也会有不同的热力学状态。而当从全空间 ε_{Tq} 来看问题时,这种载荷史的效应可等价地用对应的热力学路径造成的后果——内部结构的特定变化来加以描述。只要 t 时刻状态点 p 在该空间的位置被确定，其热力学状态和材料内部结构状况（包括其内变量组）就完全确定。如果我们从ε_T子空间来讨论熵的存在,就相当于在新的组织结构下来讨论熵的存在,这和在原始构形中来讨论熵作为状态函数的存在，并无原则上的不同。这意味着在任一ε_T子空间中热力学状态的变化可看成是对应于特定的内部组织状况下（内变量被固定在确定的值上）的可逆系统的变化，因而前而关于可逆系统的分析方法全部适用于该子空间。

我们仍从热力学第一定律的左边写成Pfaffy型来开始我们的证明，利用(1·3)式可将(3·30)式展开为

$$\frac{\partial \in}{\partial T}dT+\frac{\partial \in}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial \in}{\partial q_i}dq_i-X_i dx_i=dQ \tag{3·31}$$

上式左边显然是Pfaffy型，它的局部可积性（即$dq_i=0$时的可积性）可由Carathéodory 定理的下述推论来得到

推论：Pfaffy型$Y_i dy_i$局部可积的充要条件是在与p点同一子空间 ε_T 的邻域内存在一点 p'，它不能沿下述方程组确定的路径来达到

$$Y_i(y_i,\ q_a)dy_i=0 \tag{3·32}$$

$$dq_a=0 \qquad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{3·33}$$

方程（3·33）是该路径位于子空间ε_T中的数学描述。把该数学推论引用于式(3·31)，显然意味着该路径是绝热的和可逆的，因而根据公理二及其相应的解释，我们确信存在着一个积分分母（T，x_i，q_a）和一个函数η（T，x_i，q_a），使得下式成立

$$\frac{\partial \in}{\partial T}dT+\frac{\partial \in}{dx_i}dx_i-X_i dx_i=\theta d\eta\Big|_{q_a} \tag{3·34}$$

式中的一竖及其下标表明 η 的增量是在内变量q_a作为参变量且保持常数得到的。(3·34)式是确定熵 η 作为不可逆系统中状态变量T、x_i和q_a的状态函数的数学描述，即 $\eta=\eta(T,\ x_i,\ q_a)$，$\alpha=1,\ 2,\ \cdots m$。这一描述立即得出下述一些重要的结果，将（3·34）式的右边展开得到

$$\frac{\partial \in}{\partial T}dT+\frac{\partial \in}{\partial x_i}dx_i-X_i dx_i=\theta\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}dT+\frac{\partial \eta}{\partial x_i}dx_i\right) \tag{3·35}$$

因而有

$$\partial \in/\partial T=\theta\partial\eta/\partial T \tag{3·36}$$

$$X_i=\partial \in/\partial x_i-\theta\partial\eta/\partial x_i \tag{3·37}$$

如果引入下列三式表达的变换

$$x_i=x_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6 \tag{3·38a}$$

$$q_a=q_a \qquad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{3·38b}$$

$$\theta=\theta(T,\ x_i,\ q_a) \tag{3·39}$$

使 θ 成为表征温度的独立变量，并引入另一称为Helmholtz自由能的状态函数$\psi(x_i, \theta, q_\alpha)$

$$\psi = \in - \theta\eta \tag{3·40}$$

再利用(3.36)和(3.37)式可得

$$X_i = \partial\psi/\partial x_i \Big|_{\theta, q_\alpha} \tag{3·41}$$

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big|_{\underset{\sim}{C}, q_\alpha} \tag{3·42}$$

式中　$\alpha = 1, 2, \cdots, m$

这里值得注意的是尽管这个系统是不可逆的，但自由能 ψ 却起着一个广义势的作用，应力和熵的数值可以由它对相应的应变分量和温度求偏导数而求出，因此在建立本构方程时 ψ 是极为重要的。另外（3·41）和（3·42）式虽然与（3·26）和（3·27）式在偏导数形式上相同，但是它们有着重要的区别。在前者的情况下自由能 ψ 是参数式地依赖于m个内变量q_α，它在(3·41)和(3·42)式的求导过程中保持常数。而(3·26)和(3·27)式与内变量无关，它只适宜于可逆系统。利用式（2·3）和（2·4），（3·41）式可变为有限变形下的应力计算公式

$$S_{IJ} = 2\partial\psi/\partial C_{IJ}\Big|_{\theta, q_\alpha} \tag{3·43}$$

或

$$S_{IJ} = \partial\psi/\partial E_{IJ}\Big|_{\theta, q_\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \cdots, m \tag{3·44a}$$

在小变形下即得

$$\sigma_{ij} = \partial\psi/\partial\varepsilon_{ij} \tag{3.44b}$$

式中 ψ 计每单位未变形体积的Helmholtz自由能密度。由式（3·44a），ψ 可看成 Piola-Kirchhoff应力S_{IJ}的广义势函数。

作为方程（3·41）和（3·42）的结果，我们得到

$$\dot{\psi} = X_i\dot{x}_i + \partial\psi/\partial q_\alpha\,\dot{q}_\alpha - \eta\dot{\theta} \tag{3·45}$$

从上式可见，在等温条件及$\dot{q}_\alpha = 0$的附加约束下，ψ 具有可以回收的纯能量的物理含义。事实上在上述条件下，如果系统从应变状态 $x_i^{(1)}$变化至应变状态 $x_i^{(2)}$，则系统自由能的增加为

$$\Delta\psi = \int_{x_i^{(1)}}^{x_i^{(2)}} X_i dx_i \tag{3·46}$$

而如果回复到原来的应变状态，即 $x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$，则显然有$\Delta\psi = 0$，即能量回收了。

以上的结果，我们可总结为下述定理：

定理：对任一个经受热力学过程的不可逆系统存在一个称之为“熵”的状态函数，以及由它而得出的“自由能”的状态函数。后者起着一个广义势作用，以至作用于该系统的应力及熵的数值大小可以由它通过求相应的偏导数而得出。

§ 8·4 Clausius-Duhem不等式

在经典热力学中我们有下述极为重要的基本假设——Kelvin假设，它可叙述如下：

在等温条件下，如果不搅动或使边界变形，就不能对系统作功。

联系着刚才进行的关于自由能的讨论，我们可以将该假设改为下述公设

公设 在等温条件下，如果无搅动时，带有稳定边界的自由能不能增加。

这一假设的正确性是十分明显的。否则的话，自由能的增加就可转化为功（如果q_a为常数就能全部回收了），于是该系统变成了无穷尽的能源，并由此可创造出永动机，而这是不可能的。由此假设出发，我们可得出十分重要的Clausius-Duhem不等式。事实上在等式（3·35）的两边各加上$\partial\psi/\partial q_a \cdot dq_a$，并注意到式（3·31）、(3·41)和(3·42)就可得到

$$\theta\dot{\eta} - \dot{Q} = -\dot{\psi}|_{x,\theta} \tag{4·1}$$

等式的右边表明所研究的热力学局部微系统的自由能的变化是在等温、固定边界及无电磁力等造成内部搅动（应变为零）的情况下变化的，因而根据刚才的公设

$$\dot{\psi}\Big|_{x,\theta} \leqslant 0 \tag{4·2}$$

由（4·1）式推出：

$$\dot{\eta} \geqslant \dot{Q}/\theta \tag{4·3}$$

（4·3）就是著名的Clausius-Duhem不等式。

（4·1)式的右边肯定为正，设以$\theta\dot{\eta}_i$表示，其中 $\dot{\eta}_i \geqslant 0$， （4.4）

则有

$$\dot{\psi}\Big|_{x,\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial q_a}\dot{q}_a = -\theta\dot{\eta}_i \tag{4·5}$$

将(4·5)式代入（4·1）得到

$$d\eta = dQ/\theta + d\eta_i = d\eta_e + d\eta_i \tag{4·6}$$

由式可见，不可逆系统熵的增加，可由两种完全不同的方式产生。等式的右边的第一部分即$d\eta_e$，是从外部流入该系统的熵。而第二部分即$d\eta_i$，则是由于系统内部的不可逆变化而产生的，对不可逆系统它始终大于零，它反映着熵只会产生不会消灭的自然规律，对可逆过程则等于零。即有

$$d\eta_i \geqslant 0 \tag{4·7}$$

（等号仅适用于可逆过程）

将（4·5）式代入（4·1）得到不可逆系统熵的组成如下

$$d\eta = dQ/\theta + d\eta_i \tag{4·8}$$

至此为止，我们可以用与经典热力学第二定律完全平行的表述来总结我们关于连续介质微系统ω_x的熵的存在性的研究，可参看§5·1的叙述。

$\dot{\eta}_i$常称为熵产率，而$\theta\dot{\eta}_i$则表征着耗散功率，由式（4·5）可知在使内变量组获得增量的过程中所耗散的功率与功应为

$$\theta\dot{\eta}_i = -\partial\psi/\partial q_a \dot{q}_a \geqslant 0 \tag{4·9}$$

$$\theta d\eta_i = -\partial\psi/\partial q_\alpha dq_\alpha \geqslant 0 \tag{4·10}$$

（式中 $\alpha = 1，2，\cdots，m$）

注意到内变量q_α的变化是完全独立，因此上述不等式应对每一个内变量q_α的变化都成立，若引进相应于$dq_{(\alpha)}$运动的广义内摩擦力$Q^{(\alpha)}$，则显然有

$$Q^{(\alpha)} = -\partial\psi/\partial q_{(\alpha)} \tag{4·11}$$

及

$$Q^{(\alpha)} dq_{(\alpha)} \geqslant 0 \tag{4·12}$$

这里将dq_α改为$dq_{(\alpha)}$是强调相同的符号α不再作和，而$Q^{(\alpha)}$是由与$dq_{(\alpha)}$构成耗散功的共轭项而唯一定义的，它既不限于只具有通常的摩擦力的物理内涵，也不要求它必须具有力的因次。从下章中我们可以看到内变量一般应表成二阶张量的形式，相应地广义内摩擦力也应表成二阶张量的形式，因而有

$$Q_{ij}^{(\alpha)} dq_{ij}^{(\alpha)} \geqslant 0 \tag{4·13}$$

$$Q_{ij}^{(\alpha)} = -\frac{\partial\psi}{\partial q_{ij}^{(\alpha)}} \tag{4·14}$$

其中$Q_{ij}^{(\alpha)}$是相应于第α个内变量在ij方向分量的变化对应的广义内摩擦力。式（4·12）或（4·13）是以内变量形式表达的Clausius-Duhem 不等式的派生形式。

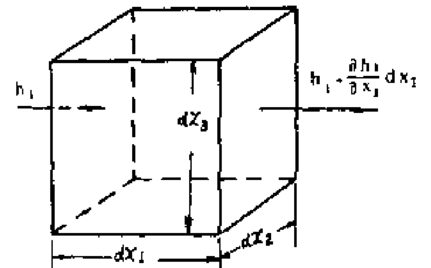


图8.1 热流矢量h

（图中只画出x方向的分量）

附注：式（4·9）所表示的仅是熵产率$\dot{\eta}_i$的一部分，即由内部不可逆变形产生的熵产。物体的热传导过程即热量由体内高温区流向低温区并不断使温度均匀化的过程同样是一个不可逆过程，它也使熵η_i增加，因而同样存在与此过程相应的熵产率。现求这一部分熵产率。

取无限小单元体如（图8·1），由于不考虑内部耗散，单元体的总熵即由外部供热产生。设热流矢量为h，内热源为$\dot{q}$，则dt时间内通过单元体界面及由内热源传给单元体的热量为

$$dQ = \Big(-\frac{\partial h_1}{\partial x_1}dx_1dx_2dx_3 - \frac{\partial h_2}{\partial x_2}dx_2dx_1dx_3 - \frac{\partial h_3}{\partial x_3}dx_3dx_1dx_2 + \dot{q}\rho dx_1dx_2dx_3\Big)dt$$

这样，瞬时构形中，单位体积的总熵变化率为$\dot{\eta}' = dQ/(\theta dx_1dx_2dx_3dt)$，而单位变形前体积计的总熵变化率为（未计内耗散）

$$\dot{\eta} = \frac{\rho_0}{\rho}\cdot\frac{dQ}{\theta dx_1dx_2dx_3dt} = -\frac{\rho_0}{\rho\theta}h_{i,i} + \frac{\rho_0\dot{q}}{\theta} = \frac{\rho_0}{\rho\theta}(\rho\dot{q} - h_{i,i})$$

单位变形前体积由外部作用产生的熵的变化率为（参见(9:5·12)式）

$$\dot{\eta}_e = \frac{\rho_0}{\rho\theta}(\rho\dot{q} - h_{i,i}) + \frac{\rho_0 h_i}{\rho\theta^2}g_i$$

因此，热传导引起的熵产率为

$$\dot{\eta}_i = \dot{\eta} - \dot{\eta}_e = -\frac{\rho_0 h_v}{\rho\theta^2} g_i$$

这一结果可以这样解释，设为稳定过程，因而单元体的状态变量包括T、η等不发生变化，并设边界面流进流出的热量dQ相等，由于流入的边界上其温度T_i高于流出的边界上的温度T_0，因而流入的熵dQ/T_i小于流出的熵dQ/T_0，但单元体的熵不变，可见内部有η_i产生。

于是，同时考虑不可逆变形和热传导时，总的熵产率与温度θ之积为

$$\theta\dot{\eta}_i = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\rho_0 h_i}{\rho\theta} g_i\right) \tag{4·15}$$

但对我们经常处理的实际问题来说，主要考虑的是由于不可逆变形造成的熵产率，即$-\frac{\partial\psi}{\partial q_a}\dot{q}_a$。

§8·5 Onsager原理

由上节式(4·9)、(4·11)我们易于得到与熵产率密切相连的耗散功率的下述表达式

$$\theta\dot{\eta}_i = \sum_{a=1}^{m} Q_{ij}^{(a)} \dot{q}_{ij}^{(a)} \tag{5·1}$$

即它们可以表达成广义内摩擦力$Q_{ij}^{(a)}$与内变量变化率$\dot{q}_{ij}^{(a)}$之积，这种情况只是更为广泛的不可逆过程（如热传导、扩散、化学反应，粘性流动和渗流等）的一个特例。在一般情况下可以用熵产率写出为

$$\dot{\eta}_i = \sum_{K}^{m} J_K X_K \geqslant 0 \tag{5·2}$$

$$(K=1, 2, \cdots, m)$$

式中，J_K称之为第K个广义流（例如化学反应中的反应率和不可逆变形中的$\dot{q}^{(a)}/\theta$），X_K为相应之广义力（如化学反应中的亲合力及不可逆变形中的广义摩擦力$Q^{(a)}$）。这里再次强调上式中"·"表示物质导数，而等号仅适合于可逆过程，此时我们有

$$J_K = 0, \quad X_K = 0 \qquad （可逆过程）$$

在分析不可逆过程时，J_K与X_K的关系是十分重要的。很自然地人们可假设广义力与广义位移之间的关系在一定范围内是线性的，这一假设得到宏观现象的证实，故常称之为现象学关系。其中特别重要的是在这些关系中系数之对称性，它常称之为Onsager原理，可以综合叙述如下：

如果能够恰当地选择广义流J_K和广义力X_K，使得每单位时间的熵产率可以写为

$$\dot{\eta}_i = \sum_{K=1}^{m} J_K X_K \quad K=1, 2, \cdots, m$$

且广义流J_K能由现象学关系表成广义力X_K的线性齐次函数

$$J_K = \sum_{K=1}^{m} L_{KL} X_L \tag{5·3}$$

则系数矩阵L_{KL}是对称的，即有

$$L_{KL} = L_{LK} \tag{5·4}$$

我们首先用各向异性晶体热传导的例子来说明这一关系，在热传导中广义流是与热流矢量h成比例的，而广义力则是与温度梯度gradT成比例的，其间的关系可以用现象学关系表示如下：

$$\left.\begin{aligned} h_x &= L_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + L_{12}\frac{\partial T}{\partial y} + L_{13}\frac{\partial T}{\partial z} \\ h_y &= L_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + L_{22}\frac{\partial T}{\partial y} + L_{23}\frac{\partial T}{\partial z} \\ h_z &= L_{31}\frac{\partial T}{\partial x} + L_{32}\frac{\partial T}{\partial y} + L_{33}\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{5·5}$$

有趣的大量精细实验证明，即使X，Y，Z轴与晶体主轴不重合，其系数对称关系

$$L_{KL} = L_{LK} \qquad L,K = 1,2,3$$

仍然成立。

Onsager原理也被用来描述几个不可逆过程的相互干涉，例如在一维热扩散中，温度梯度$\partial T/\partial x$与浓度梯度$\partial G/\partial x$可看成广义力，它们不仅造成各自对应的广义流，即热流通量h_Q和质流通量h_G，而且还通过下式表达现象学规律互相影响

$$\left.\begin{aligned} h_Q &= L_{11}\partial T/\partial x + L_{12}\partial G/\partial x \\ h_G &= L_{21}\partial T/\partial x + L_{22}\partial G/\partial x \end{aligned}\right\} \tag{5·6}$$

式中L_{12}用来描述浓度差对热流通量之影响（Dufour效应），L_{21}则用来描述温度差对质流通量的影响（Soret效应），而式（5·6）中的第一、二式则可看成是计及了这些影响的修正Fourier热传导定律和Fick扩散定律。根据Onsager原理我们有

$$L_{12} = L_{21}$$

现在我们来看Onsager原理在研究不可逆变形中之影响，其现象学关系表现为广义摩擦力$Q_{ij}^{(\alpha)}$与内变量$q_{ij}^{(\alpha)}$变化率之间的下述线性关系

$$Q_{ij}^{(\alpha)} = b_{ijkl}^{(\alpha)} \frac{dq_{kl}^{(\alpha)}}{dt} \tag{5·7}$$

上式表明$Q_{ij}^{(\alpha)}$不仅与$dq_{ij}^{(\alpha)}\Big/dt$有关，而且与内变量其它分量的变化率$dq_{kl}^{(\alpha)}\Big/dt$线性相关，显然系数$b_{ijkl}^{(\alpha)}$表示的正是$dq_{kl}^{(\alpha)}\Big/dt$对$Q_{ij}^{(\alpha)}$影响的现象学关系中的系数，反之$b_{klij}^{(\alpha)}$则表示$dq_{ij}^{(\alpha)}\Big/dt$对$Q_{kl}^{(\alpha)}$影响的系数，根据Onsager原理，应有：

$$b_{ijkl}^{(a)} = b_{klij}^{(a)} \tag{5·8}$$

Onsager原理是经典不可逆热力学的一个基础，它使不可逆热力学的研究大大简化，但近年来人们对这一原理的有效性存在着争论，这是因为一方面只有存在"流"与"力"的某种恰当选择时才是正确的，另一方面已经发现在有些不可逆过程中它将造成较大误差。

习 题

8·1 设在连续介质中的某点，其形变率V_{ij}与应力张量σ_{ij}分别由下述矩阵给出

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

试决定该点之应力功率$\sigma_{ij}V_{ij}$。

8·2 在某些连续介质力学问题的处理中，为了分析方便起见，常假设

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)} + \sigma_{ij}^{(D)} \tag{a}$$

式中，$\sigma_{ij}^{(C)}$是守恒的应力张量，而$\sigma_{ij}^{(D)}$是耗散应力张量，在这一应力分解的假设下，能量方程可写为

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{q} \tag{b}$$

若设$\sigma_{ij}^{(D)} = \beta V_{iK}V_{Kj}$，试通过形变率张量$V_{ij}$的不变量来表示其不可逆耗散功率。

8·3 对下述二维的Pfaffy型，找积分分母$\theta(x, y)$所必须满足的微分方程

$$dQ = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

8·4 试由表征热力学第一定律在εT子空间局部可积性的式（3·35）去推导式（4·1）

第九章 粘弹性理论

粘弹（塑）性流变材料本构方程和响应特性的研究十分重要，除了它在材料工程、管道运输工程、地下工程、核动力工程及生物力学等方面的重大应用价值以外，它对于建立许多近代连续介质力学的概念和方法论也是十分重要的。实际上近代许多不同的研究方法和思想（例如内变量理论和不可逆热力学的引入，公理化的方法等）都与粘弹（塑）性等流变介质的研究紧密相联并由此发展起来。本书中我们以粘弹性体为对象，综述各种方法于一章，以图使有关本构和力学响应等方面的知识深化，综合化和普遍化。

本章我们先讨论各类连续介质在突加载荷和/或渐变载荷下的响应特性，以便通过对比和概括更好地掌握流变介质的特点。接着研究了机械元件模型的响应特性和微分型本构方程。特别是讨论了松驰时间的物理意义。在§9·3中讨论了遗传型暗盒模型，从输入及响应函数间的关系上阐明材料的遗传和记忆函数（特性）的概念，并与理论电工和控制理论中的传输函数（特性）进行了某种类比，进而叙述了Boltzmann叠加原理；接着讨论了差核记忆函数的时间平移性及材料的衰减记忆原理及非回退公理。在此基础上讨论了各向异性粘弹体的本构方程及独立的粘弹材料函数的数目，并从而得出各向正交异性与各向同性材料的本构方程，前者在复合材料的分析中有应用。§9·4集中讨论了含内变量的不可逆热力学方法，通过模型示例得出了连续介质小变温、小变形下力学量与热学量耦合的本构方程。§9·5则集中介绍研究本构关系的公理化系统，特别是Coleman意义下的简单物质的概念，及由理性热力学得出的关于本构关系的结论，由于客观性原理的重要性还专门对此原理进行了较为广泛和深入的讨论。

§9·1 流变介质与其它连续介质力学特性的区别、研究意义和方法

各种连续介质在载荷作用下的响应特性存在着很大的差别。在第五章中我们已对虎克固体和牛顿流体的本构方程作过初步讨论，现在再从响应特性上分别对各种连续介质进行分析，以便通过对比和概括更好地掌握流变介质的特点。

弹性固体 它在突加应力τ作用下将产生突然的应变，而在连续变动的应力作用下将产生连续变化的应变。卸载时，应变恢复，一般无耗散；但也有弹性体（例如充填橡胶）虽然卸载后能几何恢复，但仍存在耗散，这称之为Mullins效应，是由于微结构损伤（如填料与颗粒之间产生孔隙）而造成的。以上特性分别表示在(图9·1的(a)、(b)和(c))中。

牛顿流体与非牛顿粘性流体。 突然加载引起突加的应变率以造成连续流动（图9·2）；变化的应力造成变化的应变率（$\gamma=k\tau(t)$），结果造成应变是应力史的函数：

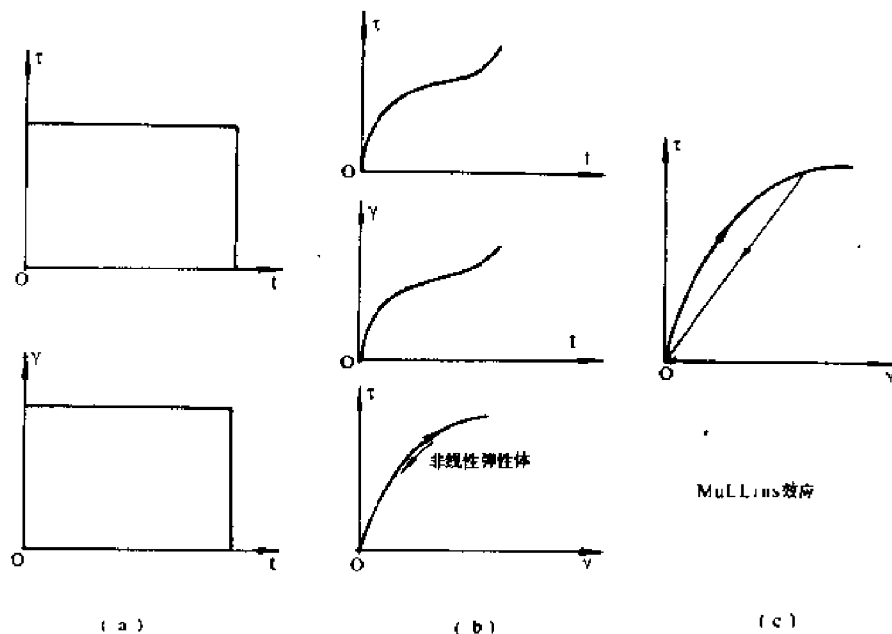


图9·1 弹性固体在应力作用下的响应特性

$$\gamma=\int_0^t\dot{\gamma}\,dt=\int_0^t k\tau(t)dt \quad (1\cdot1)$$

这意味着应变值不仅取决于当时的应力值 $\tau(t)$，而更重要的是取决于应力的历史或路径；牛顿流体卸载时既无应变恢复又无热力学恢复，所供给的能量转化为流体内能以克服内部阻力，最后转化成热能损失了，因而是一个不可逆的热力学过程。

非牛顿粘性流体与牛顿流体的最大区别，是其粘性系数不再保持常数，即存在下述关系

$$\tau=\mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (1\cdot2)$$

随 $\mu(\dot{\gamma})$ 的特性不同又分为：拟塑流体（或触变体），它的粘性系数 μ 随 $\dot{\gamma}$ 增加而减小，越搅越省力（如血浆）；胀粘流体（触稠体），μ 随 $\dot{\gamma}$ 加大而加大，越搅越稠；也有 $\mu(\dot{\gamma})$ 开始时是无穷大，然后再保持常数，这就是刚塑性牛顿流体，它只有在 $\tau>\tau_s$ 后才会产生切应变（如泥浆）。

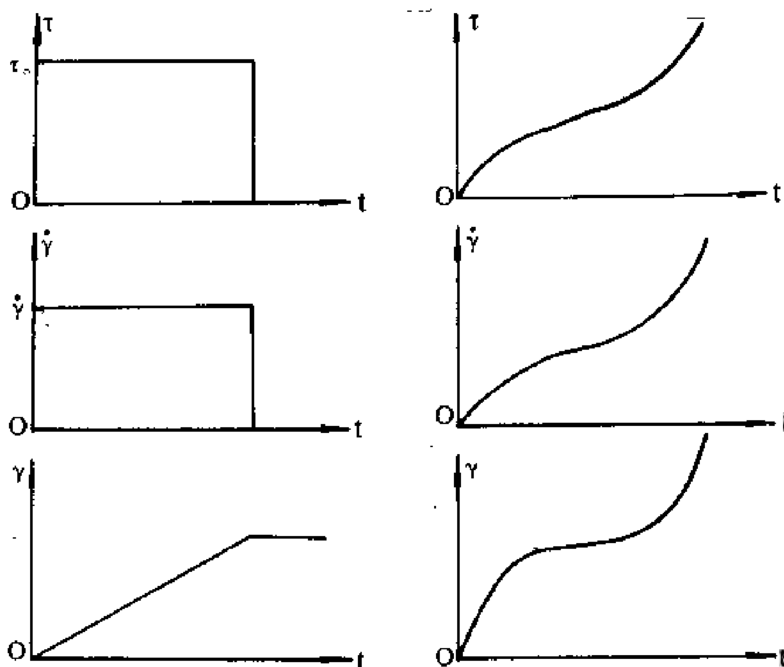
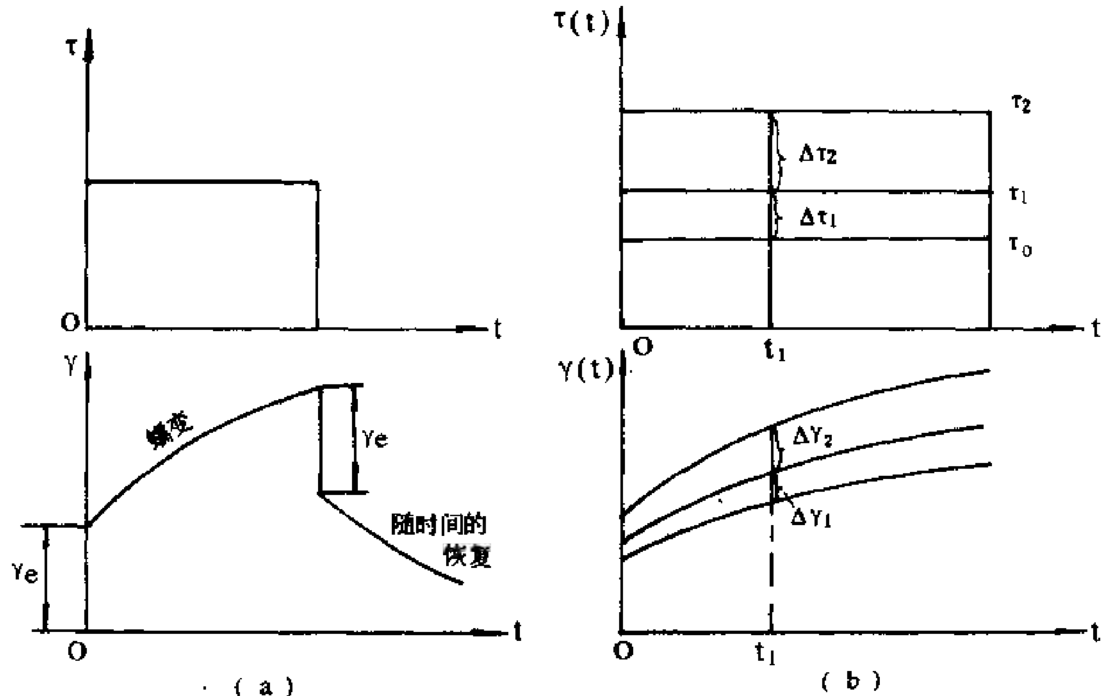


图9·2 粘性流体在载荷作用下的响应特性

粘弹性体 其应力响应介于弹性体与牛顿流体之间。如果施一突加应力则产生突加的弹性应变并随之以连续的流动（图9·3(a)）；施加变化的应力则造成变化的瞬时应变和瞬时应变率，结果造成应变是应力历史的函数；卸载

后弹性应变立即恢复并随之以依赖时间的恢复，但一般不能完全恢复原状，存在着热力学的损耗，因而是不可逆的过程。

粘弹性在工程中应用较广泛的是线性粘弹性体，它的特点是在任何瞬时下载荷与变形之间保持线性，但应力与应变的比值，即其模量却随着时间和频率而变化（但模量与当时的应力和应变值无关）。如以（图9·3（b））为例，在任一瞬时 t，我们有：



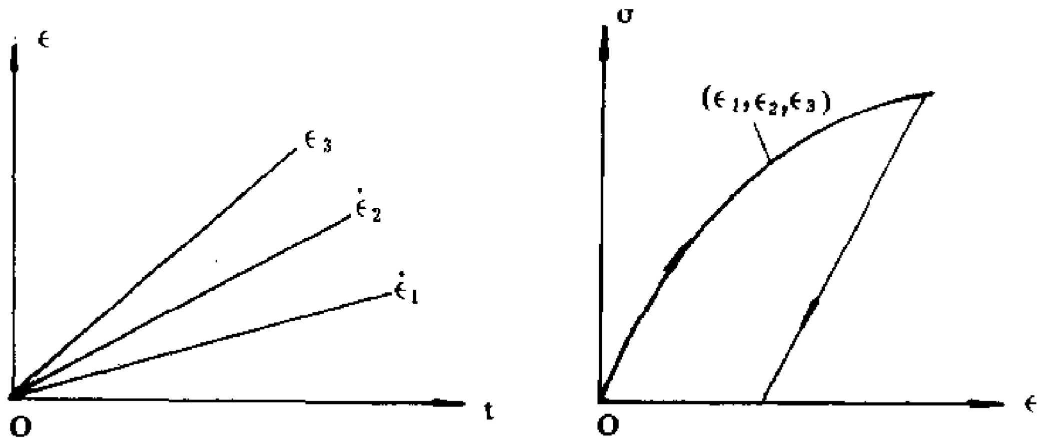
（a）　　（b）

图9·3　粘弹性体在载荷作用下的响应特性

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\gamma_2}=\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\gamma_1}=E(t) \tag{1·3}$$

一般粘弹性体在小变形时常可近似假设为线性粘弹性体，本章讨论的就是线性粘弹性体。

塑性体　其应力响应是与应变率无关的，即在不同的应变率作用下，其应力应变曲线$\sigma-\varepsilon$是一样的（图9·4），这是它与粘弹性体及粘塑性体的根本区别；其次是卸载时存在着残余变形，其卸载应力应变曲线与加载应力应变曲线不重合，应力将是应变历史或加载路径的函



（a）　图9·4　塑性体在应力作用下的响应特性　（b）

数，这些构成了与非线性弹性体的区别（图9·4*b*）。

粘塑性体 它的应力响应与应变率相关，卸载时有残余变形，其粘性抗力不再与应变率呈线性关系，基本特性与非牛顿流体很类似，不过一个是固体，一个是流体。

这里顺便指出的是，虽然就粘弹（粘塑）固体与牛顿（非牛顿）流体的应力应变关系的形式而言，固体与流体之间存在很多相似之处，但它们的属性却有着很大的区别：流体有无穷多种可能的初始构形，而固体则只有一种自然构形；在松驰实验条件下，流体中的应力可以完全松驰而消失，而固体应力松驰后趋向稳定值以使构件维持平衡；流体中的力学响应一般是各向同性的，而固体则可以是各向异性的；另外，用途不同，在工程上对固体与流体提出的分析要求也是根本不同的。通常把用流体方法处理的流变问题归于"流变学"，而固体力学处理的流变问题则如上所述称之为粘塑性或粘弹性力学。

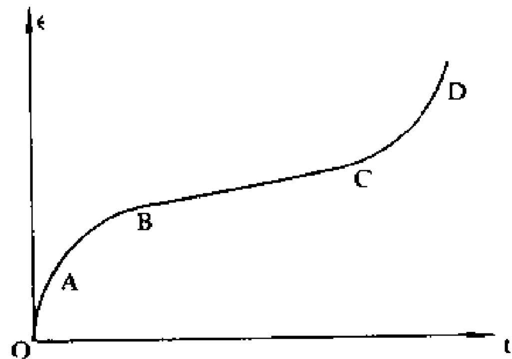


图9·5 蠕变的三阶段

概括起来说，流变物质有两个最显著特点：一个是蠕变，即在恒定应力下应变随时间不断发展的现象，它通常包含如（图9·5）所示的三个阶段：即蠕变开始阶段（OAB）、蠕变速率保持不变的稳定发展阶段（BC）和不稳定的破坏阶段（CD），如果在此破坏阶段中卸载，则不仅可观察到很大的粘塑性残余变形，而且其弹性模量亦将远小于初始加载时的弹性模量，此即蠕变损伤现象；另一特点是应力松驰，即保持应变不变时应力随时间逐渐降低的过程。蠕变和松驰造成变形过大或紧固件的松脱，危害较大，对于塑料和高温金属的设计是必须加以考虑的。

粘弹性的研究大约始于1865年Kelvin的工作，他为卡诺主编的大英百科全书撰写"热力学第二定律"时，用金属、木材、棉线和橡皮进行扭摆实验，他从振动衰减现象中发现，材料并不完全服从虎克定律，而必须引入粘性影响来考虑材料的内耗，从而提出了现在以他命名的弹簧——阻尼器的并联模型来模拟这种现象。以后Maxwell 1867年提出了弹簧——阻尼器的串联模型；接着Boltzmann 1874年提出了各向同性线性粘弹性的三维理论；Rayleigh 1877年将线性阻尼引入弹性体振动方程；19世纪末叶Voigt进一步发展了粘弹理论，1909年Volterra又把Boltzmann原理推广到各向异性固体，1928年Bingham提出了流变学（Rheology）这一名词。但是早期的粘弹性研究只在少数物理学家和数学家手中进行，并未引起工程界与力学界的广泛注意，发展比较缓慢。近年来，由于化纤、塑料、建筑材料、聚合物材料及复合材料的发展，以及石油运输、机械中的高温技术、核动力技术、阻尼结构设计、地质构造、地下工程和水工结构的力学响应和稳定性的分析（联系于滑坡、塌方和瓦斯突出等安全问题），生物力学中软组织和生物汁液的力学特性及航天技术中固体推进剂的研制等都促使人们给予流变学及粘弹（塑）性理论以足够的重视。在理论上，Biot于1954—1959年首先成功地将经典不可逆热力学与内变量理论引入到粘弹性理论中。而特别值得提出的是理性力学学派作出了很大的贡献，Noll（1955）、Rivlin和Ericksom（1955、1959、1960）通过不变量发展了有限变形理论，Coleman和Noll（1959、1960、1961）等发

展了含记忆材料的本构理论，特别是Coleman在1964年发表的"具有记忆材料的热力学"一文对这一门科学的发展更起着重要的影响。

现代流变学可分为理论流变学、微观流变学、应用流变学和实验流变学等许多分支。本章则仅限于用唯象学的方法，研究粘弹性材料的本构方程。

§9·2 机械元件模型、微分型本构方程

I. Maxwell、Kelvin 和标准线性模型

现在我们仿照Maxwell和Kelvin当年的方法，用机械元件来模拟粘弹性材料的力学响应特性。这些模型是由弹簧与牛顿阻尼器组合而成的，它们分别以符号 s 和 d 表示之。

Maxwell 流体 它是如（图9·6）给出的弹簧与牛顿阻尼器串联的模型。弹簧的伸长 ε_s 由虎克定律决定

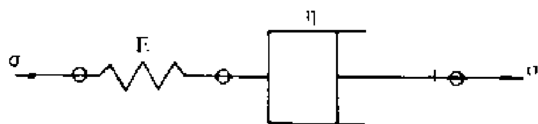


图9·6 Maxwell 流体

$$\varepsilon_s = \sigma / E \tag{2·1}$$

阻尼器的速率 $\dot{\varepsilon}_d$ 由牛顿阻尼定律决定：

$$\dot{\varepsilon}_d = \sigma / \eta \tag{2·2}$$

式中，η 为牛顿阻尼系数。我们显然有

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d \tag{2·3a}$$

及

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_d \tag{2·3b}$$

将式（2·1）对 t 微分后得到的 $\dot{\varepsilon}_s$ 与式（2.2）表示的 $\dot{\varepsilon}_d$ 一起代入式(2·3b)，得

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon} \tag{2·4}$$

或改写成

$$\sigma + \frac{\eta}{E}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon} \tag{2·5}$$

以下我们将看到对微分型模型，一般可写成下述标准形式

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} + \cdots = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} + \cdots \tag{2·6}$$

比较式（2·5）与（2·6）可见，对Maxwell模型，只有 p_1 与 q_1 不为零，我们有

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_1\dot{\varepsilon} \tag{2·7a}$$

且

$$p_1 = \eta/E = \tau_m, \quad q_1 = \eta \tag{2·7b}$$

式中 τ_m 称为 Maxwell 模型的松驰时间。

Kelvin 固体 它是由（图9·6）给出的弹簧与阻尼器并联的模型。我们显然有下列三式表达的平衡、几何和物理关系：

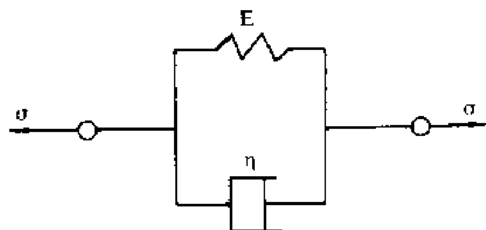


图9·7 Kelvin 固体

$$\sigma_d + \sigma_s = \sigma \tag{2·8}$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_d = \varepsilon \tag{2·9}$$

$$\sigma_d = \eta \dot{\varepsilon}_d, \quad \sigma_s = E\varepsilon_s \tag{2·10}$$

将式（2·9）、（2·10）代入（2·8）得

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \tag{2·11}$$

与式（2·6）比较后可写出下述标准形式

$$\sigma = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \tag{2·12}$$

式中 $q_0 = E$，$q_1 = \eta$，以下我们将看到 Kelvin 模型的松驰时间 τ 也等于粘性系数与弹性模量之比，为与Maxwell 模型相区别，特给它们附以下标K，则得

$$\tau_K = \eta / E \tag{2·13}$$

标准线性固体 它是由一 Maxwell 元件与另一弹簧并联而成（图9·8）。

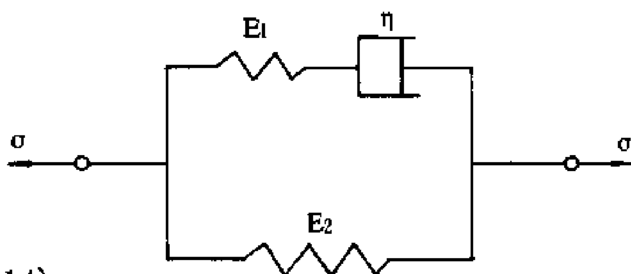


图9·8 标准线性固体

对 Maxwell 元件我们有式（2·4）表示的下述关系

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}_1 / E_1 + \sigma_1 / \eta \tag{2·14}$$

由平衡方程及变形谐调条件显然有：

$$\sigma_1 = \sigma - E_2 \varepsilon \tag{2·15}$$

微分上式得

$$\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma} - E_2 \dot{\varepsilon} \tag{2·16}$$

将式（2·15）与（2·16）的 σ_1 与 $\dot{\sigma}_1$ 代入式（2·14）的右边，我们有

$$\sigma + \eta \dot{\sigma} / E_1 = E_2 \varepsilon + (1 + E_2 / E_1) \eta \dot{\varepsilon} \tag{2·17}$$

写成标准形式有

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \tag{2·18}$$

式中

$$p_1 = \tau_\varepsilon = \eta / E_1, \quad q_0 = E_2 \tag{2·19}$$

$$q_1 = E_2 \tau_\sigma, \quad \tau_\sigma = \eta \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (2·20) \quad (2·21)$$

τ_ε，τ_σ 是引入的两个常数，也称之为标准线性固体的松驰时间。

Ⅱ．蠕变圆度和松驰模量、三种模型的响应特性

为了求得各种机械模型的力学响应就必须求解上述常系数线性微分方程组，最有效方法是采用 Laplace 变换，它的优点在于将物理平面 t 上函数 f 的微分运算转换为拉普拉斯平面 s 上 $\overline{f}$ 的代数运算，这样就将微分方程变成了容易求解的代数方程。函数 $f(t)$的Laplace 变换是由下式定义的

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \tag{2·22}$$

它的运算规则及从 s 平面上的象函数去求解原函数的方法可参见有关数学书籍。当 $f(t)$或

它的导数在 $t=0$ 处有奇异性时，就需要选择是取 0_- 或 0_+ 作为积分下限，以便确定下述形式的导数公式中 $f(0)$ 的取法

$$
\left.\begin{aligned}
L[\dot{f}(t)] &= -f(0)+s\overline{f}(s)\\
L[\ddot{f}(t)] &= -\dot{f}(0)-sf(0)+s^2\overline{f}(s)
\end{aligned}\right\} \tag{2·23}
$$

在我们处理的大多数情况下，$t<0$ 时函数 f 为零，我们下面将取 0_- 作为积分下限，以便使式（2·23）中所有的 f 及其导数在零点的值为零，这样 $f(t)$ 的 n 阶导数的Laplace变换就变为 $S^n\overline{f}(s)$。对零点处函数间断的情况，常可采用阶跃函数 $H(t)$ 和脉冲函数 $\delta(t)$ 来简化运算（图9·9）。这两个广义函数的定义及其主要特性可列出如下。

定义　脉冲函数 δ 由下列两式定义

$$
\left.\begin{aligned}
&① \quad \delta(t)=0 \qquad t\neq 0\\
&② \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1,\quad \varepsilon>0
\end{aligned}\right\} \tag{2·24}
$$

阶跃函数 $H(t)$ 则由式(2.10)定义（图9.9）

$$
H(t-t_0)=\begin{cases} 1 & t>t_0\\ \frac{1}{2} & t=t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases} \tag{2·25}
$$

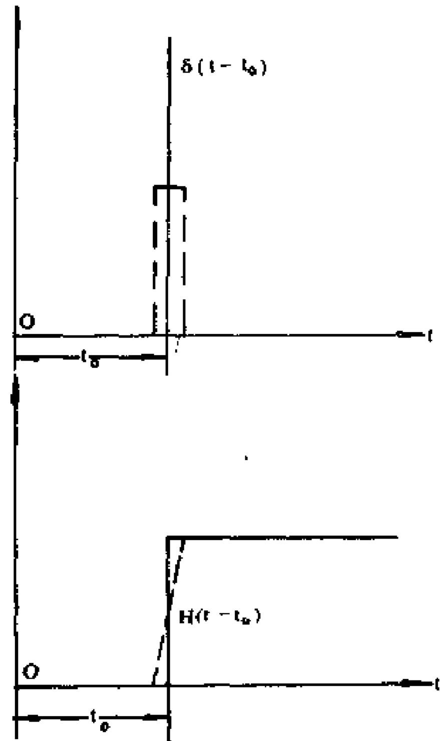


图9·9　脉冲函数 $\delta(t-t_0)$ 与阶跃函数 $H(t-t_0)$

基本性质为：

$$
\delta(t-t_0)=\frac{d}{dt}H(t-t_0) \tag{2·26}
$$

$$
\int_I f(t)\,\delta(t-t_0)dt=\begin{cases} f(t_0) & 若\ t_0\ 在\ I\ 内\\ 0 & 若\ t_0\ 在\ I\ 外\end{cases} \tag{2·27}
$$

$$
f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{2·28}
$$

函数 $H(t)$ 与 $\delta(t)$ 的 Laplace 变换分别为：

$$
L[H(t)]=1/s \tag{2·29a}
$$

$$
L(\delta(t))=1 \tag{2·29b}
$$

另外我们要记住对于函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积积分

$$
\begin{aligned}
f_1(t)*f_2(t) &= \int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)d\lambda\\
&=\int_0^t f_1(t-\lambda)f_2(\lambda)d\lambda
\end{aligned} \tag{2·30a}
$$

的 Laplace 变换可表成每一函数 Laplace 变换之积，即有

$$
L[f_1(t)*f_2(t)]=L[f_1(t)]\cdot L[f_2(t)] \tag{2·30b}
$$

下面我们仍限于讨论前面研究的三种模型，对式（2·5）、（2·11）和（2·17）进行 Laplace 变换后得到

$$\overline{\sigma}(s)=E(s)s\overline{\varepsilon}(s) \tag{2·31}$$

式中$E(s)$对不同模型有：

Maxwell 模型：$E(s)=\eta_m/(1+\tau_m s)$ (2·32a)

Kelvin 模型： $E(s)=E(1+\tau_k s)/s$ (2·32b)

标准线性固体：

$$E(s)=[E_1E_2+(E_1+E_2)\eta s]/(E_1+\eta s)s \tag{2·32c}$$

式（2·31）表明在 s 域内的粘弹性本构方程，具有虎克定律的形式，而$E(s)$是由材料的固有性质决定的。若定义 $sE(s)$的倒数为粘弹材料的传递函数

$$\frac{1}{sE(s)}=\frac{\overline{\varepsilon}(S)}{\overline{\sigma}(S)}=\frac{L[\varepsilon(t)]}{L[\sigma(t)]}=\frac{L(\text{输出})}{L(\text{输入})} \tag{2·33}$$

忆及理论电工和系统调节理论中传递函数有与之相似的意义，我们可以通过它将粘弹性力学的分析与理论电工和调节理论的分析联系起来。

若给定应变历史 $\varepsilon(t)$，由(2·31)式可得应力响应为

$$\sigma(t)=L^{-1}[E(s)s\overline{\varepsilon}(s)] \tag{2·34}$$

对于所研究的三种模型，只需将式(2·32)代入上式，注意(2·29)与(2·30)的逆变换并经运算后即可归化为下述统一形式

$$\sigma(t)=\int_0^t E(t-\tau)\frac{d\varepsilon}{d\tau}d\tau \tag{2·35}$$

$E(t)$的具体形式对不同模型不同

Maxwell 流体

$$E(t)=Ee^{-(t/\tau_m)}H(t) \tag{2·36}$$

Kelvin 固体

$$E(t)=\eta\delta(t)+EH(t) \tag{2·37}$$

标准线性固体

$$E(t)=E_2\left[1-\left(1-\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}\right)e^{-t/\tau_\varepsilon}\right]H(t) \tag{2·38}$$

$E(t)$的物理意义是极为重要的，我们可以确证它就是所谓的松驰模量，即突加一单位应变并固定不变后应力的松驰，事实上若在 $t=0^+$处突加一恒定应变 ε_0，即

$$\varepsilon=\varepsilon_0H(t) \tag{2·39}$$

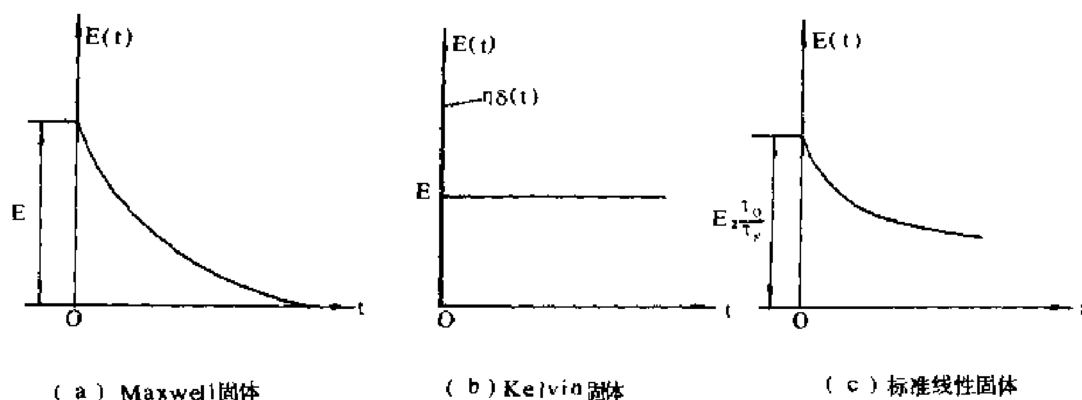
将式(2·39)代入式(2·35)，并注意到式(2·27)可得：

$$\sigma(t)=\varepsilon_0\int_0^t E(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=\varepsilon_0E(t)$$

故

$$E(t)=\sigma(t)/\varepsilon_0 \tag{2·40a}$$

证毕。



（a）Maxwell固体　（b）Kelvin固体　（c）标准线性固体

图9·10　应力松驰曲线

（图9·10）是根据上述松驰模量$E(t)$画出的松驰曲线。（图9·10a）对应着Maxwell模型曲线，由式(2·36)及（图9·10a）可见其应力σ随时间t按指数衰减，当$t\to\infty$时，应力可完全松驰到零，反映着流体的特性，故该模型称为Maxwell流体。当时间t恰等于松驰时间τ_m时，其应力$\sigma(\tau_m)$与原来的应力σ_0的关系可由式(2·36)确定为

$$\sigma(\tau_m)=0.3679\sigma_0 \tag{2·40b}$$

即约为原来应力的$\frac{1}{3}$。因而τ_m是一个重要的材料参数，它就是我们在第一章导论中谈到的特征时间，若τ_m很大而考察的时间很短，则是难以观察到松驰现象的。（图9·10b）给出的是Kelvin固体的松驰响应，应力脉冲$\eta\delta(t)$意味着为使Kelvin模型产生单位阶跃应变，必须施加无限大的应力脉冲；但当加载瞬时过去后，阻尼器失去作用，弹簧承受外载且固定不变，这反映着固体特性，故因之得名。而图(9·10c)表示的标准线性固体则介于两者之间。

设应力史$\sigma(t)$给定，则在s域内的应变响应可由式(2·31)给出为

$$\overline{\varepsilon}(s)=J(s)s\overline{\sigma}(s) \tag{2·41a}$$

式中

$$J(s)=1/s^2E(s) \tag{2·41b}$$

在t域内则由拉氏逆变换求得为：

$$\varepsilon(t)=L^{-1}[J(s)s\overline{\sigma}(s)] \tag{2·42}$$

将式(2.32a、b、c)中的$E(s)$代入式(2·41b)，然后再代入上式易确证$\varepsilon(t)$可表为下述统一形式：

$$\varepsilon(t)=\int_0^t J(t-\tau)\frac{d\sigma}{d\tau}d\tau \tag{2·43}$$

且有$J(t)$的下述表达式：

Maxwell 流体

$$J(t)=(1/E+1/\eta t)H(t) \tag{2·44}$$

Kelvin 固体

$$J(t)=\frac{1}{E}(1-e^{-t/\tau_k})H(t) \tag{2·45}$$

标准线性固体

$$J(t)=\frac{1}{E_2}\left[1-\left(1-\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)e^{-t/\tau_\sigma}\right]H(t) \tag{2·46}$$

仿上，很容易证明式(2·43)中的 $J(t)$就是所谓的蠕变柔度，即突加一单位应力并保持不变后变形的发展，事实上若 $t=0^+$ 处突加一恒定应变 σ_0，即

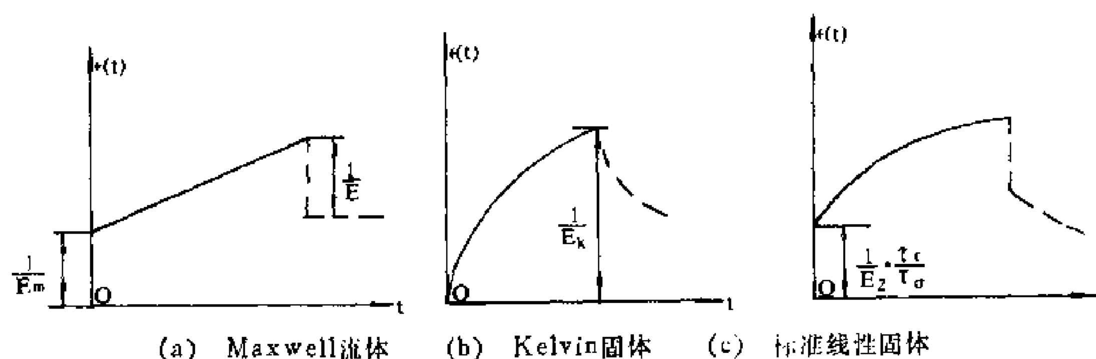
$$\sigma=\sigma_0 H(t) \tag{2·47a}$$

将式(2·46)代入(2·43)并注意到式(2·27)，则有

$$\varepsilon(t)=\sigma_0\int_0^t J(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=\sigma_0 J(t) \tag{2·47b}$$

$$J(t)=\varepsilon(t)/\sigma_0 \tag{2·47c}$$

由此可确证 $J(t)$是蠕变柔度。（图9·11）是根据式(2·44)-(2·46)画出的蠕变曲线。



(a) Maxwell流体　(b) Kelvin固体　(c) 标准线性固体

图9·11　蠕变曲线

由图(9·11a)可以看出 Maxwell 流体能描述弹性效应及稳定蠕变阶段（斜率为 $1/\eta$），且变形能无限制发展下去，如前所述这表征着流体特性；卸载时弹性变形立即恢复，然后维持形状不变（图中虚线所示）。

图（9·11b）表明 Kelvin 固体加、卸载开始时，都无弹性响应，$t\to\infty$时蠕变到达极限值 σ_0/E_K，当 $t=t_K$ 时，由式(2·45)求得其蠕变值

$$\varepsilon(t_K)=0.6321\sigma_0/E_K \tag{2·47d}$$

即为稳定蠕变的63.2%。t_K 也是表征材料动态响应的特征时间，若力作用的时间远小于特征时间 t_K，则蠕变变化很小，因而在通常的情况下，人们难以观察到地壳的蠕变现象。若考察的时间很长，例如从地质构造的长远周期上来分析它的变形，就会发现岩石也在流动。另一方面若研究的对象是一个小的地质构造或煤层，则由于其特征时间 t_K 比较小，当负荷变化时（如矿井坑道塌方或打通煤层）甚至在较短的时间（例如几秒到几天）也能观察到明显的地层蠕变（如滑坡）或由于地应力重新分布而造成瓦斯滞后突出等现象。

图（9·11c）表示的标准线性固体的特性则介于 Maxwell 流体与 Kelvin 固体之间。

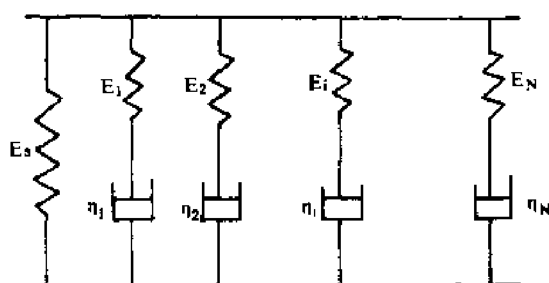
Ⅲ. 广义模型、动态响应和内耗频谱

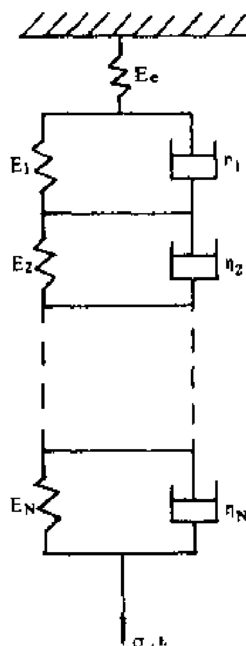
实际粘弹性材料的材料特性和耗散机制比较复杂，其相应的特征时间可能有很多个，在不同时间范围和载荷频率范围内，它们所起的作用是不同的，因此必须采用多元件组合的广义模型才能较好地反映粘弹性材料的特性。图（9·12a）是由多个Maxwell 模型并联而成的，为了避免长时间无限制的流动，在其左边设置了单独的弹簧 E_S，称为Wiechert 模型；

图（9·12b）则是由多个 Kelvin 模型串联而成的，称为 Kelvin 链或广义 Voigt 模型。它们的微分方程可以很容易根据几何、平衡和物理条件而求得，以 Wiechert 模型为例，我们有：

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots \cdots = \varepsilon_N = \varepsilon_s \tag{2·48}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i + E_s \varepsilon_s \tag{2·49}$$





(a) Wiechert 模型　　(b) 广义Kelvin 模型

图9·12 广义微分模型

σ_i 与 ε_i 是第 i 个 Maxwell 模型对应的应力与应变，它由式(2·5)确定：

$$\eta_i \dot{\varepsilon} = \left(1 + \frac{\eta_i}{E_i} \frac{d}{dt}\right) \sigma_i = \left(1 + \tau_i \frac{d}{dt}\right) \sigma_i \tag{2·50}$$

将式(2·50)代入(2·49)得

$$\sigma = \left[E_s + \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta_i \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau_i \frac{\partial}{\partial t}} \right] \varepsilon \tag{2·51}$$

$$\overline{\sigma} = \left(E_s + \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta_i s}{1 + \tau_i s} \right) \overline{\varepsilon} = E(S) \overline{\varepsilon} \tag{2·52}$$

故

$$E(s) = \frac{E_s}{s} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta_i}{1 + \tau_i s} \tag{2·53}$$

对上式进行逆变换，可得式(2·35)，且有

$$E(t) = E_s + \sum_{i=1}^{N} E_i e^{-t/\tau_i} \tag{2·54}$$

如果在式(2·51)中把部分分式型的算子表达式化成多项式，则可得式(2·6)给出的标准形式：

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \cdots = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} + \cdots$$

或写成

表 9-1　线性粘弹性机械元件模型的蠕变柔度和松弛模量

模型	名称	参数式
E, η	Maxwell流体	$p_1=\frac{\eta}{E}\quad q_1=\eta$
E, η	Kelvin固体	$q_0=E, q_1=\eta$
E_1, E_2, η	叁参数固体	$p_1=\frac{\eta}{E_1+E_2}, q_0=\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}, q_1=\frac{E_2\eta}{E_1+E_2}$
E_1, η, E_2	叁参数固体	$p_1=\frac{\eta}{E_1}, q_0=E_2, q_1=\eta\left(1+\frac{E_2}{E_1}\right)$
E, η_1, η_2	叁参数流体	$p_1=\frac{\eta_1+\eta_2}{E}, q_1=\eta_2, q_2=\frac{\eta_1\eta_2}{E}$
E, E_2, η_1, η_2	肆参数流体	$p_1=\frac{\eta_1+\eta_2}{E_1}+\frac{\eta_2}{E_2}, p_2=\frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}$, $q_1=\eta_2, q_2=\frac{\eta_1\eta_2}{E_1}$

续表

微分方程， 不　等　式	蠕变柔度$C(t)$，蠕变时间τ_C	松驰模量$E(t)$，松驰时间τ_R
$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_1\dot{\varepsilon}$	$(p_1 + t)/q_1$	$\frac{q_1}{p_1}e^{-t/\tau_R}$ $\tau_R = p_1$
$\sigma = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon}$	$\frac{1}{q_0}(1 - e^{-t/\tau_C})$ $\tau_C = q_1/q_0$	$q_0 + q_1\delta(t)$
$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon}$ $q_1 > p_1 q_0$	$\frac{p_1}{q_1}e^{-t/\tau_C} + \frac{1}{q_0}\left(1 - e^{-t/\tau_C}\right)$ $\tau_C = q_1/q_0$	$\frac{q_1}{p_1}e^{-t/\tau_R} + q_0\left(1 - e^{-t/\tau_R}\right)$ $\tau_R = p_1$
$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon}$ $p_1 q_1 > q_2$	$\frac{t}{q_1} + \frac{p_1 q_1 - q_2}{q_1^2}\left(1 - e^{-t/\tau_C}\right)$ $\tau_C = q_2/q_1$	$\frac{q_2}{p_1}\delta(t) + \frac{1}{p_1}\left(q_1 - \frac{q_2}{p_1}\right)e^{-t/\tau_R}$ $\tau_R = p_1$
$\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} = q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon}$ $p_1^2 > 4p_2$ $p_1 q_1 q_2 > p_2 q_1^2 + q_2^2$	$\frac{t}{q_1} + \frac{p_1 q_1 - q_2}{q_1^2}\left(1 - e^{-t/\tau_C}\right) + \frac{p_2}{q_2}e^{-t/\tau_C}$ $\tau_C = q_2/q_1$	$\frac{1}{\sqrt{p_1^2 - 4p_2}}\left[\left(q_1 - \frac{q_2}{\tau_{R_1}}\right)e^{-t/\tau_{R_1}} - \left(q_1 - \frac{q_2}{\tau_{R_2}}\right)e^{-t/\tau_{R_2}}\right]$, $\left.\begin{matrix}\tau_{R_1}\\ \tau_{R_2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2p_2}\left(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2}\right)$

$$\sum_{K=0}^{m} p_K \frac{d^K\sigma}{dt^K} = \sum_{K=0}^{n} q_K \frac{d^K\varepsilon}{dt^K} \qquad (p_0 = 1) \tag{2·55}$$

表 9－1　列出了各种模型的柔度与松驰模量，可以直接查阅。例如对图(9.13)所示的模型，由表 9－1 查得：

$$p_0 = 1,\ \tau_1 = \eta/E_1$$
$$p_1 = \tau_2 = \eta/(E_1 + E_2)$$
$$q_0 = E_1E_2/(E_1 + E_2),\ q_1 = q_0\tau_1$$

方程为：

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \tag{2·56}$$

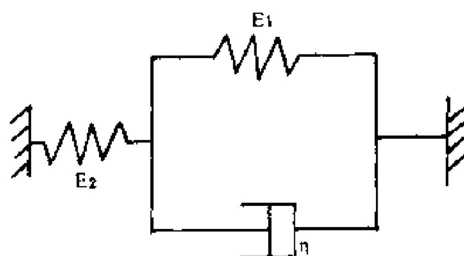


图9·13　标准线性模型

现在我们讨论粘弹材料的动态响应问题。这个问题之所以重要，是因为用突加应变与应力的方法去测松驰模量和蠕变柔度是比较困难的，且易带来惯性影响，一个较好的办法是输入一个正弦的应变波

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0(\cos\omega t + i\sin\omega t) \tag{2·57}$$

再来测其应力响应 $\sigma(t)$，这一实验极易在可进行应变控制的刚性实验机上进行(如MTS 系统)，而应力 $\sigma(t)$ 则可用载荷传感器测得。为了从实验结果中获得有用的信息，我们可将式(2·57)代入式(2·55)中进行一般性分析。这里为简明起见，讨论图(9·13)所示的标准线性模型的动态响应问题，将式(2·57)代入式(2·56)得

$$\sigma_0 = [E'(\omega) + iE''(\omega)]\varepsilon_0 \tag{2·58}$$

式中 ε_0 为输入的应变正弦波的振幅，而 σ_0 则是下述应力响应正弦波的振幅：

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t} \tag{2·59}$$

$$E'(\omega) = (q_0 + p_1q_1\omega^2)/(1 + p_1^2\omega^2) \tag{2·60}$$

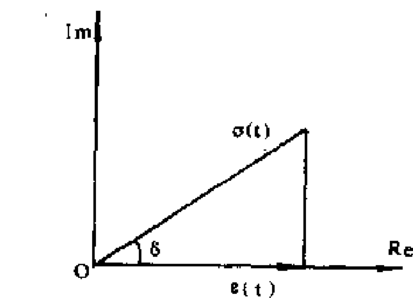
$$E''(\omega) = (q_1\omega - p_1q_0\omega)/[1 + (p_1\omega)^2] \tag{2·61}$$

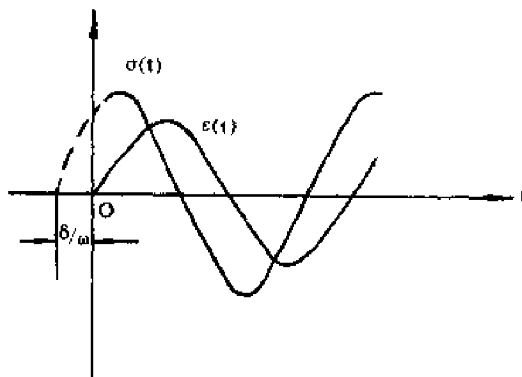
$$\mathrm{tg}\delta = E''(\omega)/E'(\omega) = (\tau_1 - \tau_2)\omega/(1 + \tau_1\tau_2\omega^2) \tag{2·62}$$

式(2·60—2·62)表明 $E'(\omega)$，$E''(\omega)$ 和 $\mathrm{tg}\delta$ 都是实数，且式 $E'(\omega)$给出了实部模量，称为存贮模量，$E''(\omega)$给出的是虚部模量，称为损失模量，幅角

$$\delta = \mathrm{tg}^{-1}(E''/E')$$

称为损失角，而 $\mathrm{tg}\delta$ 则称为粘弹材料的内摩擦系数。E'' 或 δ 角越大，则材料获得的有用应变能越小，表明损耗越大；又它们都是输入频率 ω 的函数与输入幅值 ε_0 的大小无关，因此 E'、E'' 和 $\mathrm{tg}\delta$ 表征了粘弹材料的动态力学性质。如果按照式(2·62)画出 $\mathrm{tg}\delta$ 与 $\sqrt{\tau_1\tau_1}\ \omega$ 的关系，则得到粘弹性材料的内耗频谱，示如图(9·15)，由图可看出，$\sqrt{\tau_1\tau_2}\ \omega = 1$ 时，$\mathrm{tg}\delta$ 取极值。我国金属物理学家葛庭燧曾对材料内耗的研究作出过重要贡献，已经查明，在 ω－$\mathrm{tg}\delta$ 曲线上出现很多峰值，它们相应于某些具有特定松驰时间 τ_σ 与 τ_ε 的模型，而这些时间是与某些微观现象相连的，因而关于这一图形给出的信息（联系着材料的松驰谱）对金属结构的研究是很有用的，这种内摩擦的研究在金属物理学中是很有意义的。





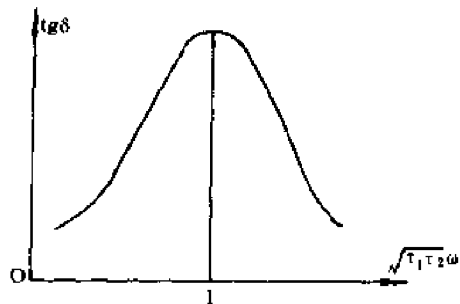


图9·14 损失角的概念　　　　图9·15 内耗频谱

§9·3 遗传积分型本构方程和记忆函数

Ⅰ．遗传（记忆）型暗盒模型

由弹簧与阻尼器构成的机械模型直观性强，求解方便，应用广泛；但是该模型不能直接反映粘弹性材料的记忆特性，低阶微分型模型与实际材料的特性相差更远，这些缺陷导致了另一种较直接的遗传积分型模型的出现。后者把粘弹性材料看成是其内部结构和作用机制都不清楚的暗盒（图9·16）。研究的方法不是去设想该暗盒的特性如何由弹簧和阻尼器的某种组合来代表，而是直接从该系统的输出输入关系中去分析材料的本构特性。其关键就是要研究输出与输入联系起来的记忆函数的基本属性，如§9·2所述这与理论电工和控制理论中的传递函数的情况很相似，但那里仅局限于一些与机械模型相连的特殊类型的函数上，而这里讨论的是较一般的情况。具体地说，设有输入函数作用在该暗盒（粘弹性材料组成的系统ω_x上），其响应由输出函数来描述。应该指出输入函数与输出函数的选择不是唯一的，可以用应力函数$\sigma(t)$作为输入函数，应变函数$\varepsilon(t)$作为输出函数，也可以反过来选择。为了叙述方便起见，我们采用$\varepsilon(t)$作为作用函数来说明问题。粘弹性材料的最重要特性是其输出函数（应力响应$\sigma(t)$）具有记忆作用，即不仅对t时刻的输入〔$\varepsilon(t)$〕发生响应，而且还对t时刻以前的作用〔$\varepsilon(\tau)$、$\tau\in(-\infty,\ t)$〕也发生响应，即输出函数应该是输入函数历史的泛函数，写成数学公式就是下面表达的泛函形式：

$$\sigma(t)=\mathop{F}_{\tau=-\infty}^{t}[\varepsilon(t,\ \tau)] \tag{3.1}$$

它表达的是一个函数簇〔作用史函数簇$\varepsilon(t,\ \tau)$，$\tau\in(-\infty,\ t]$〕与当前的响应$\sigma(t)$之间

的关系，而不是通常那种点对应的函数关系。顺便说明的是上面所述的记忆特性是从响应的角度上来看问题的，如果从作用或输入函数的角度来看问题，则可将粘弹性材料的这种特性看成是遗传作用，故在文献中遗传材料与记忆材料，这两种名字都常加以采用。

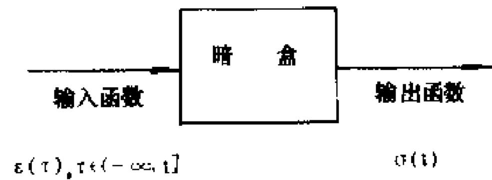


图9·16 遗传型暗盒模型

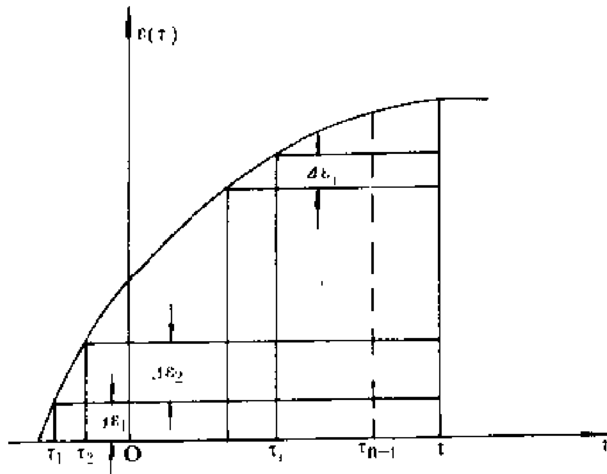


图9·17 Boltzmann迭加原理

Ⅱ. Boltzmann叠加原理

下面我们用一维粘弹性系统来说明与该原理相连的基本概念。设作用函数 $\varepsilon(\tau)$ 在任一时刻 τ_i 有一增量 $\Delta\varepsilon_i(\tau_i)$（图9·17），现在研究它对 t 时刻响应函数增量 $\Delta\sigma$ 之影响，根据式(3·1)表达的概念，显然这种影响应该是 t 与 τ_i 两者的函数，以 $\Delta_i\sigma(t,\tau_i)$ 表示之，这里 Δ 后的下标 i 强调的是 τ_i 时刻的增量 $\Delta\varepsilon_i$ 引起的，由于所研究的是线性系统，则作用函数增量 $\Delta\varepsilon_i(\tau_i)$ 与其对应之输出函数增量 $\Delta_i\sigma(t,\tau_i)$ 间应存在下述的比例关系

$$\Delta_i\sigma(t,\tau_i)=E(t,\tau_i)\Delta\varepsilon_i(\tau_i) \tag{3·2}$$

如果作用函数在时刻 t 之前（区间 0、t）内）有一系列的增量 $\Delta_i\varepsilon(\tau_i)$，$i=1$、2，…，$n$（图9·17），则它们对于当前的响应 $\sigma(t)$ 都有影响，其一般形式显然可以写成

$$\sigma(t,\Delta\varepsilon_i(\tau_i))=\sigma(t,\tau_i,\Delta\varepsilon_i)\quad i=1、2，\cdots，n \tag{3·3}$$

Boltzmann 假设各个 $\Delta\varepsilon_i$ 对 $\sigma(t)$ 的作用互不影响，因而叠加原理成立，这样就得到：

$$\sigma(t)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\sigma=\sum_{i=1}^{n}E(t,\tau_i)\Delta\varepsilon_i(\tau_i) \tag{3·4}$$

当作用函数 $\varepsilon(\tau)$ 连续变化时，就要求 $n\to\infty$，这样就得到了在连续的应变史 $\varepsilon(\tau)$ 作用下应力响应的下述表达式

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}E(t,\tau)d\varepsilon(\tau)=\int_{-\infty}^{t}E(t,\ \tau)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}d\tau \tag{3·5}$$

后一等式仅在应变 $\varepsilon(\tau)$ 是 τ 的可微函数时才能成立。式(3·5)表示的就是线性粘弹性系统的 Boltzmann 叠加原理，它也可将式(3·4)进行 Taylor 级数展开仅保留线性项而得到（甩去展开式中的交错项）等价于忽略各个 τ_i 时刻作用效果的相互影响。

Ⅲ. 时间平移性、衰减记忆原理与非回退公理

式(3·4)中的 $E(t,\tau_i)$，或式(3·5)中的 $E(t,\tau)$ 是我们一开始就强调的记忆函数（或遗传函数），现在有必要来研究它的许多重要属性。首先我们看看它与式(2·35)中引入的 $E(t-\tau)$ 的联系与区别。不难看出 $E(t,\tau)$ 也具有松驰刚度的意义，它表达了在 τ 时刻

作用一单位应变并保持不变时对以后任一时刻 t 的应力的影响，事实上若在 τ_i 时刻作用一突加应变

$$\Delta\varepsilon_i = \Delta\varepsilon_0(\tau_i)H(\tau-\tau_i)$$

则由式(3·4)或(3·5)可得

$$E(t,\tau_i) = \Delta\sigma(t)/\Delta\varepsilon_0(\tau_i) \tag{3·6}$$

因此表达的正是 τ_i 时刻作用一单位阶跃应变引起的应力松驰，即松驰刚度。$E(t,\tau)$ 与 $E(t-\tau)$ 的不同之处在于后者仅是前者的一种特殊情况，一般说 $E(t,\tau)$ 的形式会使差值 $(t-\tau)$ 相同、但 t 值不同的两个 E 值不同，这意味着两个规律相同但作用时间相差一个常数 K 的应变史 $\varepsilon_1(\tau)$ 和 $\varepsilon_2(\tau)$，不能造成规律相同间隔相差为 K 的应力史 $\sigma_1(t)$ 和 $\sigma_2(t)$，即尽管有

$$\varepsilon_2(\tau) = \varepsilon_1(\tau-K) \tag{3·7a}$$

却不能对应力推出下述相类似的关系式

$$\sigma_2(t) = \sigma_1(t-K) \tag{3·7b}$$

这意味着同一材料同一载荷方式，今天作用的效果会与明天的不同，我们称这种材料为老化材料，它是不会满足时间平移性的。相反如果限制 $E(t,\tau)$ 的形式只是响应延迟时间 $(t-\tau)$ 的函数，则我们容易证明时间平移性公式(3·7 b)的成立。事实上由于 ε_2 的作用时间比 ε_1 的作用时间 τ 迟了 K，故其响应应分别由下式(3·8)与(3·9)给出

$$\sigma_2(t) = \int_{-\infty}^{t} E(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon(\tau-K)}{\partial\tau}d\tau \tag{3·8}$$

$$\sigma_1(t) = \int_{-\infty}^{t} E(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{3·9}$$

在上式中令 $t = t-K$，则有

$$\sigma_1(t-K) = \int_{-\infty}^{t-K} E(t-K-\tau)\frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{3·10}$$

再令 $\tau = \tau'-K$，则式(3·10)变为：

$$\sigma_1(t-K) = \int_{-\infty}^{t} E(t-\tau')\frac{\partial\varepsilon(\tau'-K)}{\partial\tau'}d\tau' \tag{3·11}$$

将上式的积分变量换成 τ，并与式(3·8)比较，即可确证式(3·7 b)成立。由时间平移不变性的概念我们很容易判断下述结论的正确性，即对有差核的线性粘弹性材料来说周期性的应变作用将引起周期性的应力响应。这里提出的问题是既然描述粘弹性材料的微分型本构方程能化成有差核的积分型本构方程（2·35—2·38），为什么还要直接提出遗传积分型的本构方程呢？这里除了积分型方程中的材料函数可直接引用实验结果并便于推广到各向异性材料中去以外（见本节V），关键还在于遗传积分型的本构方程比微分型的更广泛，可以证明如果积分方程的核可分离变量，即满足退化核条件

$$E(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\psi_i(\tau) \tag{3·12}$$

则该材料才可用微分型本构方程来描述，而只有当退化核可写成退化指数核时，

$$E(t,\tau)=\Sigma E_i e^{\beta_i(t-\tau)} \tag{3·13}$$

积分型材料函数才能转化为常系数线性微分方程式。

现在我们继续对记忆函数$E(t-\tau)$的特性进行讨论，大量实验证明粘弹性材料的$E(t-\tau)$是一个随时间差$(t-\tau)$加大而单调递减的函数，（图9·18 a），即随着时间的推移材料的现时响应受过去某一时刻作用的影响越来越弱，或称记忆越来越弱，这种现象被称之为衰减记忆现象，也称为衰减记忆原理（Fading Memory Principle）。进而当差核$(t-\tau)$值大于某临界值τ_{ck}后（图9·18 a），材料对τ时刻前的记忆作用就已经完全失去了，因此可以把式(3·5)中的积分下限从$-\infty$取为τ_{ck}，若改取$\tau=-\tau_{ck}$作为时间的新原点，并记住新原点处的作用函数$\varepsilon(0_+)$一般不为零（图9·18 b），当E为差核时，此$\varepsilon(0_+)$造成的应力响应可表示为

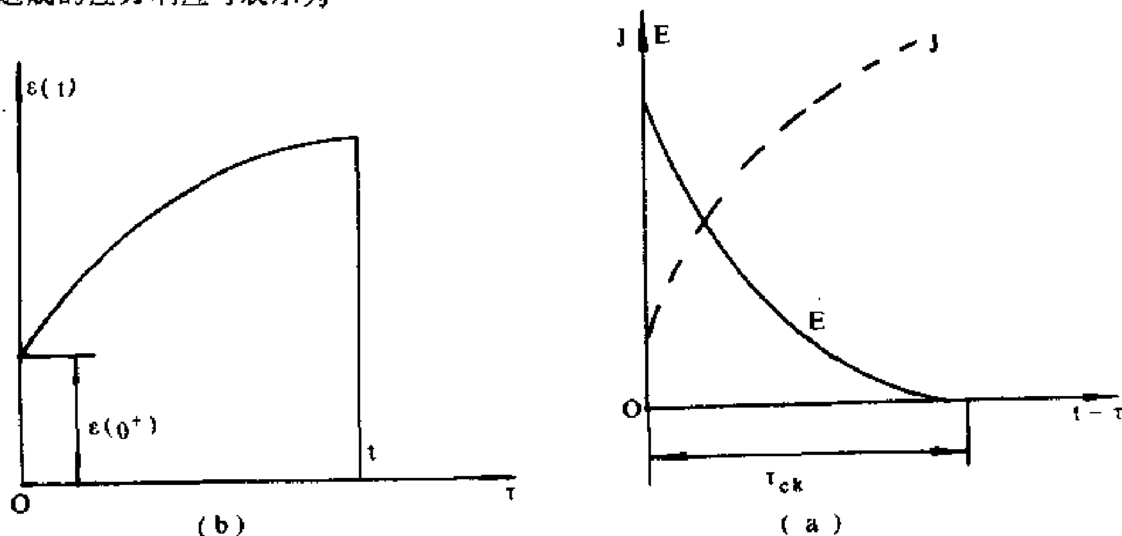


图9·18 衰减记忆的概念

$$E(t-0_+)\Delta\varepsilon(0_+)=E(t)\varepsilon(0_+) \tag{3·14}$$

于是式(3·4)可改写为

$$\sigma(t)=E(t)\varepsilon(0_+)+\int_0^t E(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{3·15}$$

上式是一种Stieljes卷积积分，可记作

$$\sigma(t)=E*d\varepsilon \tag{3·16}$$

它的最重要性质是具有对称性，即E与ε可交换位置，由此可得

$$\begin{aligned}\sigma(t)&=E*d\varepsilon=\varepsilon*dE\\&=\varepsilon(t)E(0_+)+\int_0^t\varepsilon(t-\tau)\frac{\partial E(\tau)}{\partial\tau}d\tau\end{aligned} \tag{3·17}$$

若作变量代换$\tau'=t-\tau$，则上式可化成另一形式

$$\sigma(t)=\varepsilon(t)E(0_+)+\int_0^t\varepsilon(\tau')\frac{\partial E(t-\tau')}{\partial(t-\tau')}d\tau' \tag{3·18}$$

我们曾指出过也可取应力$\sigma(t)$作为输入函数，而$\varepsilon(t)$作为输出函数，则代替式(3·5)、

(3·15)、(3·16)、(3·17)和(3·18)的是：

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} J(t,\ \tau)\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}d\tau \quad (3·19)$$

$$\varepsilon(t)=J(t)\sigma(0_{+})+\int_{0}^{t} J(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau \quad (3·20)$$

$$\varepsilon(t)=J*d\sigma \quad (3·21)$$

$$\varepsilon(t)=\sigma*dJ=\sigma(t)J(0_{+})+\int_{0}^{t}\sigma(t-\tau)\frac{\partial J(\tau)}{\partial\tau}d\tau \quad (3·22)$$

$$\varepsilon(t)=\sigma(t)J(0_{+})+\int_{0}^{t}\sigma(\tau')\frac{\partial E(t-\tau')}{\partial(t-\tau')}d\tau' \quad (3·23)$$

式中 J 是蠕变型的记忆函数，称为蠕变柔度，如式(2·47 c)中的 $J(t)$一样描述的是单位阶跃应力作用下蠕变变形的发展。它随差核($t-\tau$)变化的典型曲线示如(图9·18 a)中的虚线。J 也服从衰减记忆原理、当($t-\tau$)超过 τ_{ck} 后，不管以前的载荷史如何都不会对现在的应变 $\varepsilon(t)$产生影响。

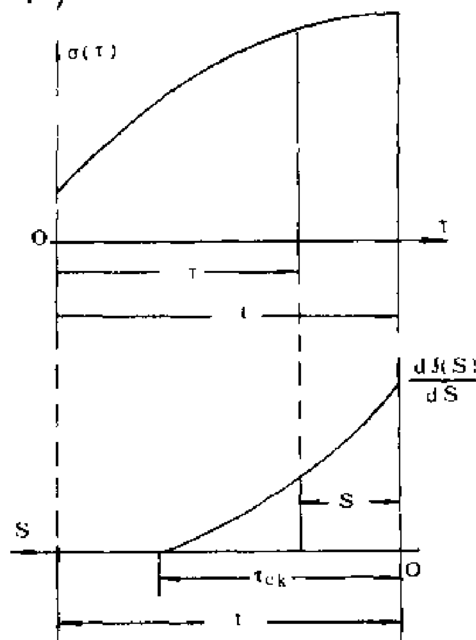


图9.19 衰减记忆原理

现在来给出衰减记忆原理的数学表述。由式(3·18)和式(3·23)及(图9·19)可见，衰减记忆要求$\left|\frac{dE(S)}{ds}\right|$和$\frac{dJ(S)}{ds}$为单调递减的函数，这样才能做到过去作用史 $\varepsilon(\tau)$或$\sigma(\tau)$对现在输出的影响随时间向过去的推移(S越来越大)而越来越弱的效果，当 $S>\tau_{ck}$ 时 则 τ_{ck} 以前的历史对现在的输出已无影响。因此衰减记忆可用下述不等式表达

$$\left|\frac{dJ(t)}{dt}\right|_{t=t_2}\leqslant\left|\frac{dJ(t)}{dt}\right|_{t=t_1} \qquad t_2>t_1 \quad (3·24)$$

$$\left|\frac{dE(t)}{dt}\right|_{t=t_2}\leqslant\left|\frac{dE(t)}{dt}\right|_{t=t_1}$$

最后我们指出在所有积分型的本构方程中应满足 $t>\tau$ 的限制，这是因为当前的响应只取决于以往的历史，而未来的作用不会倒过来对现在产生影响，这一大家承认的原理被称之为“非回退公理”。

Ⅳ．蠕变柔度与松驰模量间的关系

为了求得 $J(t)$和$E(t)$之间的关系，只需对式(3·16)和(3·21)进行拉氏变换，根据卷积积分的拉氏变换公理，我们分别得到：

$$\sigma(s)=sE(s)\varepsilon(s) \quad (3·25)$$

$$\varepsilon(s)=sJ(s)\sigma(s) \quad (3·26)$$

由上两式容易得到

$$J(s)E(s)=1/s^2 \tag{3·27}$$

利用此式可从材料的一种性能参数去求另一种参数，例如我们已知广义 Kelvin 模型的松驰模量要求其蠕变柔度，则可将式(2·53)的$E(s)$代入下式

$$J(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2E(s)}\right) \tag{3·28}$$

即可求得

$$J(t)=\frac{1}{E_e}+\sum_{i=1}^{1}\frac{1}{E_i}(1-e^{-t/\tau_i}) \tag{3·29}$$

下面我们证明$E(t)$与$J(t)$并不象线弹性那样互为倒数，而是满足下述不等式

$$E(t)J(t)\leqslant 1 \tag{3·30}$$

为了证明上式的成立，我们可先将式(3.27)改写成

$$J(s)E(s)s=\frac{1}{s} \tag{3·31}$$

对上式进行拉氏逆变换得

$$\int_{-\infty}^{t}J(t-\tau)\frac{dE(\tau)}{d\tau}d\tau=1 \tag{3·32}$$

仿照推导式(3·15)的思想，上式可变为

$$J(t)E(0)+\int_0^t J(t-\tau)\frac{\partial E(\tau)}{\partial\tau}d\tau=1 \tag{3·33a}$$

根据卷积的可变换性，上式可写成

$$J(o)E(t)+\int_0^t E(t-\tau)\frac{dJ(\tau)}{d\tau}d\tau=1 \tag{3·33b}$$

容易确认下式成立

$$\int_0^t E(t)\frac{dJ(\tau)}{d\tau}d\tau=E(t)J(t)-E(t)J(0) \tag{3·34}$$

将上式的$J(0)E(t)$代入(3·33b)我们得到

$$E(t)J(t)=1+\int_0^t[E(t)-E(t-\tau)]\frac{dJ(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{3·35}$$

根据衰减记忆原理，$E(t-\tau)>E(t)$，而柔度$J(t)$是t的单调递增函数$\left(\frac{dJ(\tau)}{d\tau}>0\right)$，

因而上式中的积分为负。故式(3·30)得证。工程上常常定义$J(t)$的倒数为蠕变模量，由式(3.30)可见，这比松驰模量$E(t)$要大。

V. 各向异性与各向同性材料的粘弹性本构方程

当我们把推导一维粘弹性本构方程的方法用于推导三维本构方程时，只需记住 Boltzmann 叠加原理仍是适用的，即不同时刻的作用效果互不干涉，可以叠加。不同点在于输出(响应)函数$\sigma_{ij}(t)$不仅与对应的应变分量$\varepsilon_{ij}(t)$有关，而且与其它的应变分量

$\varepsilon_{kl}(t)$有关，这与各向异性弹性材料一样是由材料本身的结构性质决定的。由此很容易从叠加的概念出发，写出类似于(3·4)那样的表达式进而得出等温非老化各向异性粘弹性材料的下述本构方程：

$$\sigma_{ij}(t)=\int_{-\infty}^{t}E_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{3·36}$$

及

$$\varepsilon_{ij}(t)=\int_{-\infty}^{t}J_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial\sigma_{kl}(\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{3·37}$$

式中 $J_{ijkl}(t)$和 $E_{ijkl}(t)$是张量蠕变柔度和松驰模量函数，它们也应遵守非回退公理和衰减记忆原理的约束。$E_{ijkl}(t)$和$J_{ijkl}(t)$是四阶张量，每一个下标可以从1变至3，因而可组合成81个(3^4)，基本上仿照线弹性力学中的步骤，可以证明它们中的独立常数远小于此数目。首先由于应变和应力张量的对称性，我们有：

$$E_{ijkl}=E_{ijlk}=E_{jikl}=E_{jilk} \tag{3·38}$$

即每对下标（i，j）和（k，l）之内的标号可以交换顺序，这使独立的下标只有六对，即（1，1）；（1，2）；（1，3）；（2，2）；（2，3）；（3，3）。这意味着对与对间的独立组合只有$6^2=36$个。其次，对粘弹性体这样的不可逆系统，同样存在Helmholtz 自由能密度 ψ，它起着应力势函数的作用，使得

$$\sigma_{ij}(t)=\frac{\partial\psi(t)}{\partial\varepsilon_{ij}(t)} \tag{3·39}$$

由此从含内变量的不可逆热力学方法出发，可以证明（参看§9·4及该节中的(4·33)式），松驰模量 $E_{ijkl}(t)$的前后两对指标同样可以交换，即

$$E_{ijkl}(t)=E_{klij}(t)。 \tag{3·40}$$

若将36个系数排成 6 × 6 的矩阵，则式(3·40)意味着该矩阵是对称的

$$\begin{pmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\ & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\ & & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & E_{3323} \\ & & & E_{1212} & E_{1213} & E_{1223} \\ & & & & E_{1313} & E_{1323} \\ & & & & & E_{2323} \end{pmatrix}\text{极端各向异性粘弹体} \tag{3·41}$$

这表明即使对各个方向弹性性质都不相同的极端各向异性粘弹体，也只有21个独立常数。若假定粘弹性体存在一个材料对称面，且在任意两个与此面对称的方向上材料的本构特性都相同，则与此面垂直的轴称为材料主轴并记为轴3（图9·20 a）。若将轴 3反号 则引起 ε_{13}，ε_{23}（或 γ_{13}，γ_{23}）反号（图9·20 b），同时应力张量σ_{13}和σ_{23}也应反号，但其余的应力和应变分量不变。由于轴3正负向的材料性质相同，因而轴的反号不会改变材料粘弹性常数各分量的值。在此条件下惟一的可能性就是使与E_{1123}类似的下述常数为零，即

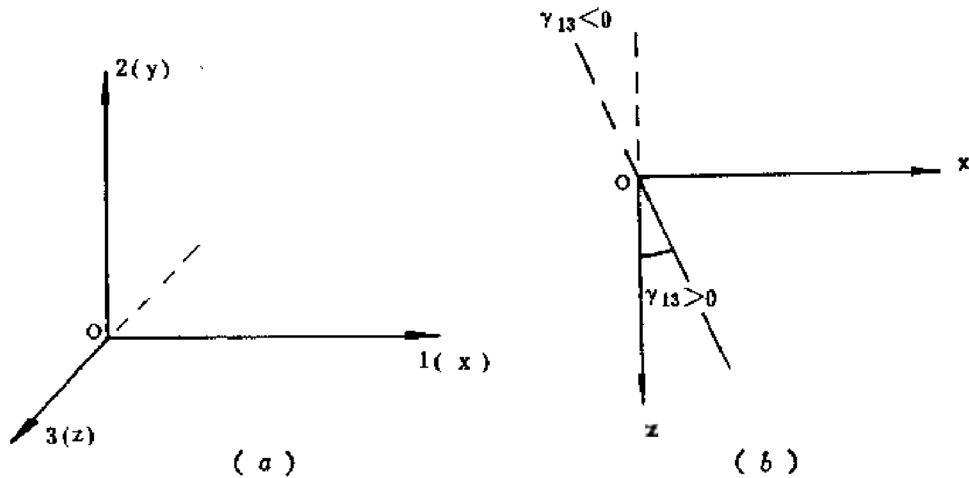


图9.20 具有一个对称轴的情况

$$
\begin{aligned}
E_{1123} &= E_{1113} = E_{2223} = E_{2213} \\
&= E_{3313} = E_{1223} = E_{1213} = E_{3323} = 0
\end{aligned}
\tag{3·42}
$$

这样具有一个对称面的材料，只有13个独立常数。进一步考虑正交各向异性粘弹性材料，即有三个互相垂直的材料主轴1，2和3的情况。设若用同一方法分别倒转2轴和3轴并使弹性常数各量值 E_{ijkl} 不变，则容易确认除结果(3·42)式以外，还有：

$$
E_{1112} = E_{2212} = E_{3312} = E_{2313} = 0 \tag{3·43}
$$

因而正交各向异性粘弹性材料只有9个独立的材料常数。常数矩阵变为：

$$
\begin{pmatrix}
E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
 & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\
 & & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & E_{1212} & 0 & 0 \\
 & & & & E_{1313} & 0 \\
 & & & & & E_{2323}
\end{pmatrix}
\quad \text{正交各向异性粘弹体} \tag{3·44}
$$

若进一步考虑横观各向同性体，即在平行于平面103的各个方向都具有相同材料特性的粘弹体(图9·21)，例如成层的粘弹岩体就属于这一类，此时层面103是横向，而轴2则是纵向)，由于1方向与3方向的材料特性相同，当把 σ_{33} 式(参见式(3.36)并考虑(3.42)式)中的 ε_{11} 和 ε_{33} 的数值对调时(轴的方向和其余应变值都不变)，则对调后的 σ_{33} 值就应等于 σ_{11} 值，即有下列等式：

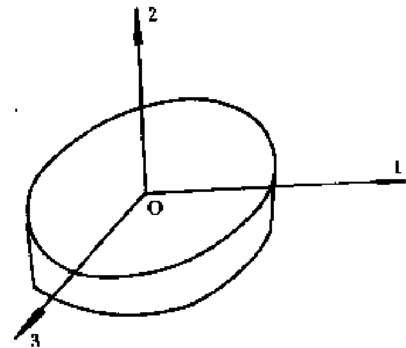


图9·21 横观各向同性体

$$
\begin{aligned}
&\int E_{3311}\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \tau}d\tau + \int E_{3322}\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \tau}d\tau + \int E_{3333}\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \tau}d\tau \\
&= \int E_{1111}\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \tau}d\tau + \int E_{1122}\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \tau}d\tau + \int E_{1133}\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \tau}d\tau
\end{aligned}
\tag{3·45}
$$

上式对任意的 ε_{11}、ε_{22} 和 ε_{33} 都成立，故必有：

$$
E_{1111} = E_{3333}, \quad E_{1122} = E_{3322} \tag{3·46}
$$

同理若将 ε_{12} 和 ε_{32} 的数值对调还可得：

$$E_{1122}=E_{2233},\quad E_{1212}=E_{2323} \tag{3·47}$$

考虑到由式(3·46)与(3·47)提供的三个条件，及103面内各向同性特性提供的一个条件 故横观各向同性体的独立弹性常数只有5个。

对于各向同性体则沿任一方向的材料性质都应相同，故2方向的性质也应与1，3方向相同，这样又可附加三个条件，即

$$E_{1111}=E_{2222},\quad E_{1122}=E_{1133},\quad E_{1212}=E_{1313} \tag{3·48}$$

因此各向同性粘弹性体的独立常数进一步下降到两个，这一结论也可直接从四阶各向同性张量的下述表达式得到

$$E_{ijkl}(t)=\lambda(t)\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(t)(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{3·49}$$

式中 $\lambda(t)$，$\mu(t)$就是两个独立的粘弹性材料常数。将式(3·49)代入式(3·36)可得

$$\sigma_{ij}(t)=\delta_{ij}\int_{-\infty}^{t}\lambda(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial\tau}d\tau+2\int_{-\infty}^{t}\mu(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{ij}(t)}{\partial\tau}d\tau \tag{3·50}$$

式中 $\lambda(t)$，$\mu(t)$为拉梅松驰模量和剪切松驰模量，利用有关应力应变的全量与偏量关系，式(3·50)还可进一步写成：

$$S_{ij}(t)=2\int_{-\infty}^{t}\mu(t-\tau)\frac{\partial e_{ij}}{\partial\tau}d\tau \tag{3·51}$$

$$\sigma_{kk}(t)=3\int_{-\infty}^{t}K(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial\tau}d\tau \tag{3·52}$$

式中

$$K(t)=\lambda(t)+\frac{2}{3}\mu(t) \tag{3·53}$$

由式(3·51)和(3·52)亦可得到其反演关系

$$e_{ij}(t)=\int_{-\infty}^{t}J_1(t-\tau)\frac{\partial s_{ij}}{\partial\tau}d\tau \tag{3·54}$$

$$\varepsilon_{kk}(t)=\int_{-\infty}^{t}J_2(t-\tau)\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial\tau}d\tau \tag{3·55}$$

J_1，J_2分别是剪切与容积蠕变柔量。

式(3·50)—(3·55)是很重要的公式，虎克定律和牛顿粘性流体定律都可作为它的特例而得到，事实上若取 $\lambda(t)$，$\mu(t)$和$K(t)$等为常数，并分别记为 λ、μ和K，则式(3.51)—3.53分别变为

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \tag{3·56}$$

$$s_{ij}=2\mu e_{ij} \tag{3·57}$$

$$\sigma_{kk}=3K\varepsilon_{kk} \tag{3·58}$$

显然式(3·56)—(3·58)表达了虎克固体的特性，若令 $\mu(t)=\mu\delta(t)$，$\lambda(t)=\lambda\delta(t)$，并将其代入式(3·51)、(3·52)和(3·53)，则得：

$$s_{ij}=2\mu\frac{de_{ij}}{dt} \tag{3·59}$$

$$\sigma_{kk}=(3\lambda+2\mu)\frac{de_{kk}}{dt} \tag{3·60}$$

式中μ与λ不再是拉梅常数，而是粘性系数。式(3·60)表示的是体积粘性，在大多数实际问题中，它的影响是可以忽略的。

以上在关于非各向同性的粘弹性体的讨论中，本构方程是相对于材料主轴写出的。如果不是主轴，则其表达式虽然复杂一些，但可通过坐标变换，从主轴的表达式变换过去。这个问题在复合材料等正交异性体中有较大的实际意义，例如单向纤维增强的复合材料板，由于基体多为塑料等高分子有机体组成，因而应看成是正交各向异性体，且常关心与主轴12成某一偏角θ的轴$1'2'$下的响应（图9·22），在这种条件下剪应变$\varepsilon_{1'2'}$也引起正应力，我们有

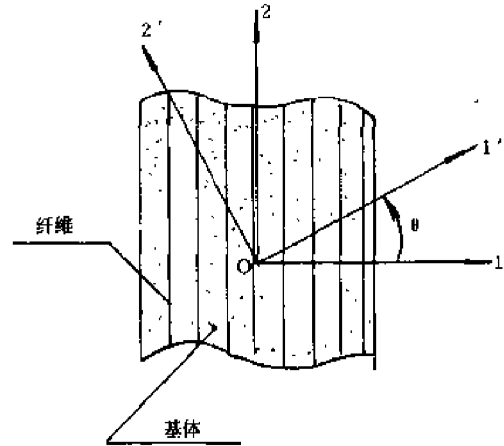


图9·22 单向纤维增强的复合材料

$$\sigma'_{11}=\int_{-\infty}^{t}E'_{1111}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon'_{11}}{\partial\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{t}E'_{1122}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon'_{22}}{\partial\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{t}E'_{1112}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon'_{12}}{\partial\tau}d\tau \tag{3·61}$$

$$\sigma'_{22}=\int_{-\infty}^{t}E'_{2211}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon'_{11}}{\partial\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{t}E'_{2222}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon'_{22}}{\partial\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{t}E'_{2212}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon'_{12}}{\partial\tau}d\tau \tag{3·62}$$

$$\sigma'_{12}=\int_{-\infty}^{t}E'_{1211}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon'_{11}}{\partial\tau'}d\tau'+\int_{-\infty}^{t}E'_{1222}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon'_{22}}{\partial\tau'}d\tau'+\int_{-\infty}^{t}E'_{1212}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon'_{12}}{\partial\tau'}d\tau' \tag{3·63}$$

其中带上标“$'$”者是在$1'2'$轴上写出的量，若记$1'$与1轴间的夹角为θ，并令$m=\cos\theta$，$n=\sin\theta$，根据张量变换规则，容易由主轴中的E_{ijkl}去决定E'_{ijkl}，其变换公式为

$$\begin{Bmatrix}E'_{1111}\\E'_{2222}\\E'_{1122}\\E'_{1212}\\E'_{1112}\\E'_{2212}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}m^4 & 2m^2n^2 & n^4 & 2m^2n^2\\ n^4 & 2m^2n^2 & m^4 & 2m^2n^2\\ m^2n^2 & m^4+n^4 & m^2n^2 & -2m^2n^2\\ 2m^2n^2 & -4m^2n^2 & 2m^2n^2 & (m^2-n^2)^2\\ -2m^3n & 2(m^3n-n^3m) & 2mn^3 & 2(m^3n-n^3m)\\ -2n^3m & 2(n^3m-m^3n) & 2m^3n & 2(n^3m-m^3n)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_{1111}\\E_{1122}\\E_{2222}\\E_{1212}\end{Bmatrix} \tag{3·64}$$

§9·4 含内变量的不可逆热力学方法

从第八章的讨论可知，内变量的完整集合表征着材料的内部组织状态，它的演变则描述着不可逆过程的发展，通过内变量演化规律及其所受的热力学约束条件的研究，就有可能建立粘弹性材料的应力应变关系。

I．内变量方法的模型示例

为了更形象地说明内变量的基本概念和通过内变量的分析建立材料本构关系的方法，我们引入一个用内变量描述的机械模型，并给以不可逆热力学的分析，由此建立其本构关系，不难预料它与其它的分析方法得到的结果将是一致的。我们仍把粘弹性系统看成是一个暗盒，为了确定它的应力应变关系，我们可用一个弹簧秤和一台应变仪来分别测出其应力与应变。实验的记录告诉我们，在相同的弹簧秤读数下，将出现不同的应变仪读数。这说明对粘弹性体来说，已经没有弹性体那种应力应变间的一一对应关系了，这促使我们想到要充分描述粘弹性体的变形必须引入附加的自由度及其相应的广义坐标。这种广义坐标的内在含义在暗盒未打开前是不易搞清楚的，但它的引入却能与可观测的应变一起来唯一地决定其应力响应，这些广义坐标就是我们指的内变量。由于内变量的变化要耗散功，因而它应与耗散元件密切联系起来，不难想象对（图9·23）那样的结构，这一广义坐标（内变量）正是阻尼器的位移，即D点相对于E点的位移q。现在我们用不可逆热力学的分析方法来说明如何通过q去建立其本构关系。§8·3已述及在等温条件下ψ表示的是可恢复的能量，即由下式表达的存贮在弹簧中的应变能，

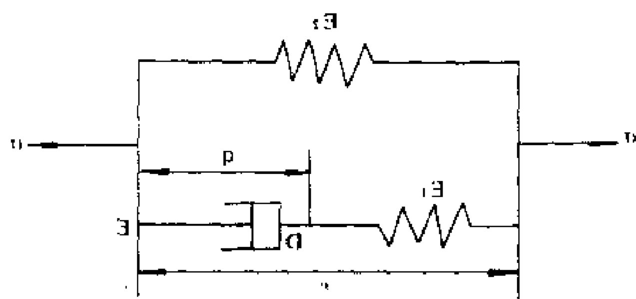


图9·23　内变量的力学模型

$$\psi = \frac{1}{2}E_2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}E_1(\varepsilon - q)^2 \tag{4·1}$$

而不可逆熵产所对应的耗散功率显然就是消耗在阻尼器上的功率，前者由式（8·4·9）为$\theta\dot{\eta}_i$，后者对牛顿阻尼器应为阻尼系数μ与速度平方之积，由此有

$$\theta\dot{\eta}_i = \mu\dot{q}^2 \tag{4·2}$$

式(8·4·9)与式(4·2)联立易得

$$\partial\psi/\partial q + \mu\dot{q} = 0 \tag{4·3}$$

将式(4·1)中的Ψ代入上式我们有

$$\mu\dot{q} + E_1 q = E_1\varepsilon \tag{4·4a}$$

用拉氏变换得

$$\bar{q}(s) = \frac{E_1}{\mu s + E_1}\bar{\varepsilon}(s)$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + s} \cdot \frac{1}{s} s \overline{\varepsilon}(s)$$

由此
$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} (1 - e^{-\lambda(t-\tau)}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau$$

$$= \varepsilon - \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \qquad (4\cdot4b)$$

另一方面由式(8:3·44b)我们有

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (4\cdot5)$$

将式(4·1)代入之可以求得

$$\sigma = E_2 \varepsilon + E_1(\varepsilon - q) \qquad (4\cdot6)$$

将以应变历史表示的q的演化规律(4·4b)式代入式(4·6)并消去内变量q，就可以求得本构关系如下：

$$\sigma(t) = E_2 \varepsilon(t) + E_1 \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \qquad (4\cdot7)$$

式中$\lambda = E_1/\mu$。上式在确定积分常数时，假定了$t = -\infty$时$\sigma = \varepsilon = q = 0$；若采用衰减记忆原理，并如式(3·15)一样改写坐标原点，则上式可改写成

$$\sigma(t) = E_2 \varepsilon(t) + E_1 \int_{0}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \qquad (4\cdot8)$$

如果采用式(2·19)—(2·21)中的记号，则所得本构关系与从纯粹的力学分析中得到的结果(2·35)和(2·38)式完全一样。

Ⅱ. 小应变、小变温下的本构方程*

如第八章所述，连续介质中的 Helmholtz 自由能应是应变张量ε_{ij}、温度θ和n个内变量$q_{ij}^{(\alpha)}$的函数。为简单起见，只讨论小应变和小变温的情况。设$t = 0$为参考状态，其自由能为ψ_0，且有$\sigma_{ij} = 0$，$q_{ij}^{(\alpha)} = 0$，$\varepsilon_{ij} = 0$，再设ψ为相对于参考状态的附加自由能，而ϑ、χ是相对于参考状态温度θ_0和熵η_0的变化量，则我们有

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, \vartheta, q_{ij}^{(\alpha)}) \quad \alpha = 1, 2 \cdots n \qquad (4\cdot9)$$

由式(8:3·44b)，及(8:3·42)可得

$$\sigma_{ij} = \partial \psi / \partial \varepsilon_{ij} \qquad (4\cdot10a)$$

$$\chi = -\partial \psi / \partial \vartheta \qquad (4\cdot10b)$$

如果我们假设广义摩擦力$Q_{ij}^{(\alpha)}$与内变量的变化率$dq_{kl}^{(\alpha)}/dt$成比例，则有

---

* 这里仿照 Valanis 推导内时本构方程的方法[32]来推导粘弹性材料的本构方程，为耗散型材料本构方程的形式不变性定律[50]，作些概念上的准备。

$$Q_{ij}^{(a)} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_{ij}^{(a)}} = b_{ijkl}^{(a)} \frac{dq_{kl}^{(a)}}{dt} \qquad (4\cdot11a)$$

由此得

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_{ij}^{(a)}} + b_{ijkl}^{(a)} \frac{dq_{kl}^{(a)}}{dt} = 0 \qquad (4\cdot11b)$$

将式(4·9)展开成Taylor级数，并甩去高于二阶的小项。由于常数项已在ψ_0中考虑，而线性项因满足初始条件必为零，于是有

$$\psi = \frac{1}{2}A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + B_{ijkl}^{a}\varepsilon_{ij}q_{kl}^{a} + \sum_{a} C_{ijkl}^{(a)} q_{ij}^{(a)} q_{kl}^{(a)}$$

$$+ D_{ij}\vartheta\varepsilon_{ij} + E_{ij}^{a}\vartheta q_{ji}^{a} + \frac{1}{2}F\vartheta^{2} \qquad (4\cdot12a)$$

注意到我们研究的材料在等温条件下变形时，其自由能都将比自然状态时增加，这意味着A_{ijkl}和$C_{ijkl}^{(a)}$必定是正定的，且由耗散功率恒正得阻尼系数张量$b_{ijkl}^{(a)}$也必是正定的。另外，因A_{ijkl}与$C_{ijkl}^{(a)}$分别为ψ中ε_{ij}和q_{ij}^{a}的齐二次项的系数，因此总可使得A_{ijkl}与$C_{ijkl}^{(a)}$对前后两对下标对称，而根据Onsager原理，$b_{ijkl}^{(a)}$也是对前后两对下标对称的，即有

$$A_{ijkl} = A_{klij},\ C_{ijkl}^{a} = C_{klij}^{a},\ b_{ijkl}^{a} = b_{klij}^{a} \qquad (4\cdot12b)$$

式(4·10)、(4·11)、(4·12)和有关热传导的方程一起已具有足够的条件来推导各向异性材料的显式本构方程（参见[1]），但为简明起见，这里我们只限于推导各向同性粘弹性材料的显式本构方程，而对各向异性材料则只给出结果。由类似于式(5·2·9)的各向同性张量表达式，我们有

$$A_{ijkl} = A_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{A_2}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (4\cdot13a)$$

$$B_{ijkl}^{a} = B_1^{a}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{B_2^{a}}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (4\cdot13b)$$

$$C_{ijkl}^{a} = C_1^{a}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{C_2^{a}}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (4\cdot13c)^{*}$$

$$b_{ijkl}^{a} = b_1^{a}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{b_2^{a}}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (4\cdot13d)$$

---

*不用Onsageer原理的更一般分析可参见Valanis论文："Entropy, Fading Memory and Onsagr's Relations" J.Math.Phys,（1967）.

$$D_{ij}=D\delta_{ij},E^{\alpha}_{ij}=E^{\alpha}\delta_{ij},K_{ij}=K\delta_{ij} \tag{4·13e,f,g}$$

将式(4·13a-g)代入式(4·12)，再代入式(4·10a、b)可得：

$$\sigma_{ij}=A_1\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+A_2\varepsilon_{ij}+B_1^{\alpha}\delta_{ij}q^{\alpha}_{kk}$$

$$+B_2^{\alpha}q^{\alpha}_{ij}+D\vartheta\delta_{ij} \tag{4·14}$$

$$-\chi=\partial\psi/\partial\vartheta=D\varepsilon_{kk}+E^{\alpha}q^{\alpha}_{kk}+F\vartheta \tag{4·15}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial q^{\alpha}_{ij}}=B_1^{\alpha}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+B_2^{\alpha}\varepsilon_{ij}+C_1^{\alpha}\delta_{ij}q^{\alpha}_{kk}+C_2^{\alpha}q^{\alpha}_{ij}$$

$$+E^{\alpha}\delta_{ij}\vartheta \qquad (\alpha\text{不作和}) \tag{4·16}$$

将上式代入(4·11b)，得到了q^{α}_{ij}的一阶线性微分方程，再将其中的q^{α}_{ij}分解为偏量$p^{(\alpha)}_{ij}$和

体积分量q^{α}_{kk}，使得

$$q^{\alpha}_{ij}=p^{\alpha}_{ij}+\frac{1}{3}q^{\alpha}_{kk}\delta_{ij} \tag{4·17}$$

就可将得到的微分方程分解为两组

$$B_0^{\alpha}\varepsilon_{kk}+C_0^{\alpha}q^{\alpha}_{kk}+E^{\alpha}\vartheta+b_0^{\alpha}\frac{dq^{\alpha}_{kk}}{dt}=0$$

$$(\alpha\text{不求和}) \tag{4·18a}$$

$$B_2^{\alpha}e_{ij}+C_2^{\alpha}p^{\alpha}_{ij}+b_2^{\alpha}\frac{dp^{\alpha}_{ij}}{dt}=0$$

$$(\alpha\text{不求和}) \tag{4·18b}$$

由以上两式可得：

$$q^{\alpha}_{kk}=-\frac{B_0^{\alpha}}{b_0^{\alpha}}\int_0^t e^{-\lambda_\alpha(t-t')}\varepsilon_{kk}(t')dt'$$

$$-\frac{E^{\alpha}}{b_0^{\alpha}}\int_0^t e^{-\lambda_\alpha(t-t')}\vartheta(t')dt' \quad (\alpha\text{不求和}) \tag{4·19}$$

$$p^{\alpha}_{ij}=-\frac{B_2^{\alpha}}{b_2^{\alpha}}\int_0^t e^{-\rho_\alpha(t-t')}e_{ij}(t')dt' \quad (\alpha\text{不求和}) \tag{4·20}$$

符号：

$$B_0^{\alpha}=\frac{1}{3}(3B_1^{\alpha}+B_2^{\alpha}),C_0^{\alpha}=\frac{1}{3}(3C_1^{\alpha}+C_2^{\alpha})$$

$$A_0 = \frac{1}{3}(3A_1 + A_2), \qquad \rho_a = C_2^a \Big/ b_2^a$$

$$\lambda_a = C_0^a \Big/ b_0^a, \quad b_0^a = \frac{1}{3}(3b_1^a + b_2^a)$$

式(4·14)亦可分成偏量 S_{ij} 和静水压力 σ_{kk} 两组，再应用式(4·19)和(4·20)，经过繁冗的数学推导后，我们得到

$$S_{ij} = 2\int_0^t \mu(t-t')\frac{\partial e_{ij}}{\partial t'}dt' \tag{4·21}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \int_0^t K(t-t')\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t'}dt' + \int_0^t D(t-t')\frac{\partial \vartheta}{\partial t'}dt' \tag{4·22}$$

$$-\chi = \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = \int_0^t D(t-t')\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t'}dt' + \int_0^t F(t-t')\frac{\partial \vartheta}{\partial t'}dt' \tag{4·23}$$

$$2\mu(t) = \left(A_2 - \sum_a \frac{B_2^a B_2^a}{C_2^a}\right)H(t) + \sum_a \frac{B_2^a B_2^a}{C_2^a}e^{-\rho_a t} \tag{4·24}$$

$$K(t) = \left(A_0 - \sum_a \frac{B_0^a B_0^a}{C_0^a}\right)H(t) + \sum_a \frac{B_0^a}{C_0^a}e^{-\lambda_a t} \tag{4·25}$$

$$D(t) = \left(D - \sum_a \frac{B_0^a E^a}{C_0^a}\right)H(t) + \sum_a \frac{B_0^a E^a}{C_0^a}e^{-\lambda_a t} \tag{4·26}$$

$$F(t) = \left(F - \sum_a \frac{E^a E^a}{C_0^a}\right)H(t) + \sum_a \frac{E^a E^a}{C_0^a}e^{-\lambda_a t} \tag{4·27}$$

式(4·21)—(4·23)表明温度的变化将对静水压力和熵有影响，但对偏应力 S_{ij} 无影响；若是等温条件则(4·21)与(4·22)式就与上节中得到的式(3·53)与(3·54a)一样。不过这里给出了核心函数的形式，特别值得注意的是由于 $C_{ijkl}^{(a)}$ 和 $b_{ijkl}^{(a)}$ 为正，导致 b_0^a、b_2^a、C_0^a和C_2^a都为正，因而 ρ_a 与 λ_2 都大于零，这意味着式(4·21)与式(4·22)中的核心函数与前节中的记忆函数一样具有衰减记忆的特性，不过在这里是根据内变量的概念从数学推导得出的结果，而在那里是从衰减记忆原理提出来的。

对各向异性粘弹性材料，用含内变量的不可逆热力学方法求得的内变量演化规律和显式本构方程如下：

$$q_{kl}^a = -\frac{B_{klij}^{(a)}}{b_{ijkl}^{(a)}}\int_{0^-}^t e^{-\lambda_a(t-\tau)}\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau - \frac{E_{ij}^{(a)}}{b_{ijkl}^{(a)}}\int_{0^-}^t e^{-\lambda_a(t-\tau)}\vartheta(\tau)d\tau \tag{4·28}$$

$$\sigma_{ij} = \int_{0^-}^t E_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial \varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau}d\tau + \int_{0^-}^t F_{ij}(t-\tau)\frac{\partial \vartheta(\tau)}{\partial \tau}d\tau \tag{4·29}$$

式中

$$\lambda_a = C^{(a)}_{ijkl} \Big/ b^{(a)}_{ijkl} > 0 \quad (4\cdot30)$$

$$E_{ijkl}(t) = \left(A_{ijkl} - \sum_a \frac{B^a_{ijkl} B^a_{klij}}{C^a_{ijkl}}\right) H(t) + \sum_a \frac{B^a_{ijkl} B^a_{klij}}{C^a_{ijkl}} e^{-\lambda_a t} \quad (4\cdot31)$$

$$F_{ij}(t) = \left(D_{ij} - \sum_a \frac{B^a_{ijkl} E^a_{ij}}{C^a_{ijkl}}\right) H(t) + \sum_a \frac{B^a_{ijkl} E^a_{ij}}{C^a_{ijkl}} e^{-\lambda_a t} \quad (4\cdot32)$$

由于 $\lambda_a > 0$，故各向异性粘弹性材料同样具有衰减记忆特性。注意到式(4·12b) 所指出的对称性可见，$E_{ijkl}(t)$同样对前后两对下标具有对称性，即

$$E_{ijkl}(t) = E_{klij}(t)。 \quad (4\cdot33)$$

§9·5　研究本构关系的公理化方法

本节介绍本构方程的公理化体系和 Coleman 意义下的简单物质及其本构描述，而把客观性原理的讨论集中在下节中进行。

本构方程描述的是一类物质的特殊属性，它用来和普适定律一起决定该物质在外力作用下的特定响应，因而这里强调的是个性。另一方面，本构方程虽然是人们在实验和经验中对该物质特性的一种数学上概括，但是在面临着大量具有复杂力学性质的物质和复杂力学过程的今天，要使这种概括摆脱狭隘经验公式的束缚，避免由现象到本质的歪曲，就必须研究本构关系的基本原理，以作为分析和判断的准绳，这里强调的却又是其共性的研究。后者是理性力学学派的先驱者所关心的中心问题，他们从作为公理的必不可少的基本事实出发，运用严格的数学演绎，企图去建立与基本的力学和物理规律不相矛盾的普遍的本构法则或称公理系统。理性力学学派所代表的这一认识论和方法论上的发展具有深远的意义，有人把它喻为古埃及度量尼罗河三角洲土地面积时的认识实践上升至平面几何公理化系统的努力，历史证明后者不仅能避免经验性几何度量中的狭隘性，而且奠定了其它学科发展的基础。

到现在为止人们提出过不同的公理化体系，在这里我们先列举下面三条，在叙述上也数了一些变动

（一）确定性原理*：物体在时刻 t 的状态和行为由物体在该时刻以前的变形史和温度史所唯一决定。

（二）局部作用原理：物体中任一点在 t 时刻的状态和行为只由该点任意小邻域内的变形史和温度史所确定。

（三）客观性原理：物质的本构方程不随时空参考标架的变换而改变。

在讨论这些原理时，我们首先要明确变形史的含义，明确我们以前定义的变形梯度 F 只

* 对有内部运动约束的物质（如不可压缩介质）的确定性原理的表述，请参看[3]§5.3.

是量度变形的一种近似，以一维物体为例，在质点X邻域内的微元dX在τ时刻的长度为

$$x(X+dX,\tau)-x(X,\tau)$$
$$=\frac{\partial x(X,\tau)}{\partial X}dX+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 x(X,\tau)}{\partial X^2}(dX)^2+\cdots \tag{5·1}$$

由此可见，一般来说变形是与各阶变形梯度$\frac{\partial x}{\partial X}$，$\frac{\partial^2 x}{\partial X^2}$，…有关的。但实际上对于我们通常遇到的连续介质来说，只考虑一阶变形梯度及其历史已具有足够的精度，Noll（1958年）称这样的物质为简单物质，它的本构关系可以概括地写为下述本构泛函的形式（式中$\mathfrak{F}$是泛函数）

$$\sigma(t)=\mathop{\mathfrak{F}}_{\tau=-\infty}^{t}(\mathbf{F}^t(\tau))\equiv\mathfrak{F}(\mathbf{F}^t) \tag{5·2}$$

上式表明简单物质内任一点$\mathbf{X}$在t时刻的应力响应$\sigma(t)$，是该点邻域内变形梯度史$\mathbf{F}(\tau)$（$-\infty<\tau<t$）的泛函数。在本节最后我们将证明实际上它应是变形历史的泛函，因此Noll定义的简单物质可认为是t时刻的应力由该点邻域内的应变史决定的材料。对Noll简单物质定义的批评是它没有考虑到温度对应力响应的影响，因而其应用是有限的。1964年Coleman提出简单物质的理性热力学理论[51]，他推广了Noll关于纯力学过程的简单物质定义使之包括了热学效应。在这一推广下，一个经受热力学过程的物质的本构方程由上面提到的确定性原理，局部作用原理，客观性原理，及§9·3介绍的减退记忆原理和下面介绍的等存在性原理五个公理来规范，这里的等存在性原理可以叙述如下

等存在性原理　在某个物质本构方程中呈现的一个独立变量应该假设它在所有的本构方程中都存在，一直到它的存在被证明与物质的对称性、物质客观性原理或其它热力学定律矛盾为止才加以排除。

对于经受热力学过程的简单物质，即所谓Coleman意义下的简单物质，其本构泛函数应写成：

$$\sigma_{ij}(t)=\mathop{\mathfrak{F}_{ij}}_{s=0}^{\infty}(F^t(s),\theta^t(s))=\mathfrak{F}_{ij}(F^t,\theta^t) \tag{5·3}$$

这里泛函的写法与式(5·2)在形式上不同，其中s是以现在时刻t作为原点向历史上某时刻追溯的时间（图9·24），$s\geqslant 0$，且其定义域为[0，∞)，符号$F^t(s)$，$\theta^t(s)$代表着历史上该时刻（或简称s时刻）的温度或形变梯度对现在时刻t的影响（注：时刻t用另一座标原点来量度），而$\mathop{\mathfrak{F}}_{s=0}^{\infty}$代表着从无限远的过去直到现在的整个形变梯度史和温度史对当前的影响。另一方面当我们对热流矢量$\mathbf{h}$建立本构方程时，一定会想到$\mathbf{h}$与温度梯度$\mathbf{g}$有关($\mathbf{g}=\mathrm{grad}\theta$)则根据等存在性原理由式(5·3)可知它也应与$\mathbf{F}^t(s)$及$\theta^t(s)$有关，即应有：

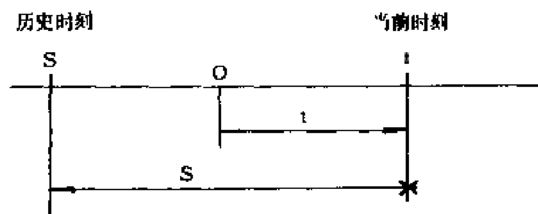


图9.24　S与t的不同座标原点及其相反的正方向
•——原点　箭头——方向

$$h(t)=\underset{S=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{g}}}(F^t(s),\theta^t(s);\ g(t)) \tag{5·4}$$

这意味着变形梯度史和温度史都被假设对温度梯度与热流矢量的关系产生影响；反过来，根据等存在性原理，$g(t)$亦应进入其它本构关系的表达式中，因而有

$$\sigma_{ij}(t)=\underset{S=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}_{ij}(F^t(s),\theta^t(s);\ g(t)) \tag{5·5}$$

$$\epsilon(t)=\underset{S=0}{\overset{\infty}{e}}(F^t(s),\theta^t(s);\ g(t)) \tag{5·6}$$

$$\eta(t)=\underset{S=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{H}}}(F^t(s),\theta^t(s);\ g(t)) \tag{5·7}$$

这就是说应力 $\sigma_{ij}(t)$，热流通量矢量 $h(t)$，内能 $e(t)$和熵 $\eta(t)$都是变形梯度史 $F^t(s)$，温度史 $\theta^t(s)$的泛函数及温度梯度现时值 $g(t)$的函数。进而Coleman应用减退记忆原理，Clausius-Duhem 不等式及上述泛函光滑性的假设，得出了一系列重要结论，它对于非线性本构理论的发展，起过重要的影响，有兴趣的读者请参阅[51]。这里我们仅限于介绍其主要结果如下，它可简称为 Coleman 定理：

对于物体中的所有光滑容许的热力学过程，Clausius-Duhem 不等式成立的充要条件是：

（1） 自由能泛函Ψ，应力泛函 σ_{ij} 及熵泛函η 均与温度梯度 $g(t)$ 无关，即 $g(t)$最后从式(5·5)—(5·7)中排除出去；

（2） 应力泛函 σ_{ij} 和熵泛函 η 由Ψ的一阶导数决定；

（3） 对应于历史 $F^t(s),\theta^t(s)$的内耗非负；

（4） 对每一光滑历史 $F^t(s)$和 $\theta^t(s)$，h 与 g 的关系为

$$h\cdot g\leqslant\rho\theta^2\sigma \tag{5·8}$$

式中σ为内耗散产生的单位质量的熵产率。

下面我们给 Coleman 定理以简单的证明。引入自由能$\Psi=\epsilon-\theta\eta$,根据式(5·6)、(5·7)，它也是变形梯度史 $F^t(s)$、温度史 $\theta^t(s)$的泛函和温度梯度现时值 $g(t)$的函数：

$$\psi(t)=\underset{S=0}{\overset{\infty}{f}}(F^t(s),\ \theta^t(s);\ g(t)) \tag{5·9}$$

在引入反映材料内部组织改变的内变量组 q_a 之后，可将自由能泛函写成函数形式：

$$\psi(t)=\psi(F_{iI},\theta,g_i,q_a)$$

此时式中的自变量均指现时值，即 $F_{iI}=F_{iI}(t)$，…，$q_a=q_a(t)$。 (5·10)

现计算从外部输入热力学系统的熵 η_e。设系统之现时体积为 V，变形前体积为 V_0，热量以Q表示，熵 η_e 以单位变形前体积计，则系统熵 η_e变化率为$\frac{D}{Dt}\int_{V_0}\eta_e dV_0=\frac{D}{Dt}\int_V\frac{\rho}{\rho_0}\eta_e dV$。此熵变化率由两部分构成，一部分是经由表面输入的热构成的，另一部分则是由内热源输入的热构成的。单位时间经由物体边界面面元ds输入的热为$(-h_in_ids)$，它对熵η_e变

化率的贡献为$\left(\frac{-h_i n_i ds}{\theta}\right)$，经整个边界面输入的热量对熵$\eta_e$变化率的贡献则为$\left[-\int_s (h_i n_i/\theta) ds\right]$。单位时间经由体元$dV$输入的热为$\rho\dot{q}dV$，它对熵$\eta_e$变化率的贡献为$\rho\dot{q}dV/\theta$，经整个体积输入的热量对熵$\eta_e$变化率的贡献则为$\int_V (\rho\dot{q}/\theta)dV$。于是系统的熵$\eta_e$变化率为

$$\frac{D}{Dt}\int_V \frac{\rho}{\rho_0}\eta_e dV = \int_V \frac{\rho\dot{q}}{\theta}dV - \int_S \frac{h_i n_i}{\theta}ds \tag{5·11}$$

利用式(4:1·11)，并将面积分化为体积分，再利用局部化假设，则由上式可得

$$\theta\dot{\eta}_e = \frac{\rho_0}{\rho}(\rho\dot{q} - h_{i,i}) + \frac{\rho_0 h_i}{\rho\theta}g_i \tag{5·12}$$

式中$g_i = \theta_{,i}$为温度梯度矢量 g 的分量，符号上面加一点仍表物质导数。

若用单位变形前体积的能量密度$\in = \rho_0 e$代替e，并不考虑面矩，则由能量守恒定律(4:4.10)式可得

$$\frac{\rho}{\rho_0}\frac{D\in}{Dt} = \sigma_{ij}V_{ij} + \rho\dot{q} - h_{i,i} \tag{5·13}$$

由此解出$(\rho\dot{q} - h_{i,i})$代入式(5·12)，再将式(5·12)代入下式Clausius-Duhem不等式(参见(8·4)

$$\theta\dot{\eta} \geqslant \theta\dot{\eta}_e \tag{5·14}$$

§
可得

$$\theta\dot{\eta}_i = \theta\dot{\eta} - \dot{\in} + \frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ij}V_{ij} - \frac{\rho_0 h_i}{\rho\theta}g_i \geqslant 0 \tag{5·15a}$$

将上式中的内能$\in$用自由能ψ表示，并注意到$\dot{\psi} = \dot{\in} - \theta\dot{\eta} - \dot{\theta}\eta$，则可得

$$\theta\dot{\eta}_i = -\dot{\psi} - \eta\dot{\theta} + \frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ij}V_{ij} - \frac{\rho_0 h_i}{\rho\theta}g_i \geqslant 0 \tag{5·15b}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \frac{\partial\psi}{\partial F_{iJ}}\dot{F}_{iJ} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial g_i}\dot{g}_i + \frac{\partial\psi}{\partial q_a}\dot{q}_a \\
\dot{F}_{iJ} &= \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_J}\right) = \frac{\partial}{\partial X_J}\left(\frac{Dx_i}{Dt}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_J} = v_{i,k}F_{kJ} \\
\sigma_{ij}V_{ij} &= \sigma_{ik}(v_{i,k} - W_{ik}) \qquad (\text{利用式}(3:2·2)、(3:2·3)) \\
&= \sigma_{ik}v_{i,k} \qquad (\sigma_{ik}W_{ik} = 0)
\end{aligned} \tag{5·16}$$

式(5·15b)化为

$$\begin{aligned}
\theta\dot{\eta}_i = &\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ik} - \frac{\partial\psi}{\partial F_{iJ}}F_{kJ}\right)v_{i,k} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right)\dot{\theta} \\
&- \frac{\partial\psi}{\partial g_i}\dot{g}_i - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\rho_0 h_i}{\rho\theta}g_i\right) \geqslant 0
\end{aligned} \tag{5·17}$$

但由§8·4注有

$$\theta\dot{\eta}_i = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\rho_0 h_i}{\rho\theta}g_i\right) \geqslant 0 \tag{5·18}$$

将式(5·18)左边的等式代入(5·17)左边等式中，我们得到下列等式

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ik} - \frac{\partial\psi}{\partial F_{iJ}}F_{kJ}\right)v_{i,k} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right)\dot{\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial g}\dot{g}_i = 0 \tag{5·19}$$

注意到该式不显含内变量，它在任意的$v_{i,k}$、$\dot{\theta}$和$\dot{g}_i$下必须成立，故上式右边分别含因子$v_{i,k}$、$\dot{\theta}$和$\dot{g}_i$的三项必须分别为零，由此得

$$\sigma_{ik} = \frac{\rho}{\rho_0}F_{kJ}\frac{\partial\psi}{\partial F_{iJ}} \tag{5·20}$$

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{5·21}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial g_i} = 0 \tag{5·22}$$

式(5·20)和(5·21)即 Coleman 定理中的条件(2)。式(5·22)表明自由能ψ与温度梯度g_i无关，因而由式(5·20)、(5·21)可见σ_{ij}和η亦与g_i无关，此即定理中的条件(1)。

我们可将内耗散率$\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_a}\dot{q}_a\right)$表示为

$$-\frac{\partial\psi}{\partial q_a}\dot{q}_a \equiv \rho_0\theta\sigma \tag{5·23}$$

将上式与式(8·4·9)等式比较，可得$\sigma = \dot{\eta}'_i/\rho_0$，这里$\dot{\eta}'_i$为由内耗散产生的熵产率，可见$\sigma$具有由内耗散产生的单位质量计的熵产率之意义。将式(5·23)代入式(5·18)得

$$\theta\rho_0\sigma - \frac{\rho_0 h_i}{\rho\theta}g_i \geqslant 0 \tag{5·24}$$

上式即为 Coleman 定理中的条件(4)。不等式(5·18)应对g_i的任意值成立，包括均温情况($g_i = 0$)，由此亦可确证内耗散功率应大于零

$$\theta\rho_0\sigma = -\frac{\partial\psi}{\partial q_a}\dot{q}_a \geqslant 0$$

这已由式(8·4·9)表明过，这就是定理中的条件(3)。当无内耗散时，即$\dot{q}_a = 0$情况，由式(5·18)得到

$$h_i g_i \leqslant 0 \tag{5·25}$$

即热流的方向沿温度降低的方向。而在一般情况，则应满足(5·24)式。

现在我们将 Coleman 定理(5·20)式的形式变换一下。注意到 Green 应变张量E_{IJ}与变形梯度F_{iJ}间的关系式(2·3·6)，可得(读者自己加以证明)

$$\frac{\partial\psi}{\partial F_{iJ}} = \frac{\partial\psi}{\partial E_{IM}} \cdot \frac{\partial E_{IM}}{\partial F_{iJ}} = \frac{\partial\psi}{\partial E_{IJ}}F_{iI} \tag{5·26}$$

则 Euler 应力 σ_{ik} 也可用 ψ 对 Green 应变张量的偏导数表示如下

$$\sigma_{ik}=\frac{\rho}{\rho_0}F_{kJ}\frac{\partial\psi}{\partial F_{iJ}}=\frac{\rho}{\rho_0}F_{iI}F_{kJ}\frac{\partial\psi}{\partial E_{IJ}}=\frac{1}{J}x_{i,I}x_{k,J}\frac{\partial\psi}{\partial E_{IJ}} \qquad (5\cdot27)$$

进而由式(7:1·6)又得

$$S_{IJ}=JX_{I,i}X_{J,k}\sigma_{ik}=\frac{\partial\psi}{\partial E_{IJ}} \qquad \text{或 } \mathbf{S}=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}} \qquad (5\cdot28)$$

上式通常称之为Coleman关系，在第八章中我们已得到这一结果(见§8.3 Ⅲ)，在那里用的是Valanis给出的证明，尽管它们在历史上是同时出现的(见 Coleman 论文的附注，J.Chem. Phys.Vol.47,1967,601)，但证明方法则完全不同，Coleman方法由于卷入了较多的关系，如果单从数学上探讨则容易引起混淆，而后者在物理上显得较为明晰。

关于 Coleman 关系式(5·20)式我们还要作进一步的讨论。上面我们考虑的是无内部运动约束的情形因而速度梯度张量的分量 $v_{i,k}$ 看成是彼此独立的。对于有内部运动约束的情形，例如体积不可压缩情形，则速度梯度张量各分量间不再是彼此独立的，而应满足下列关系

$$v_{i,k}\delta_{ik}=v_{k,k}=0 \qquad (5\cdot29)$$

因此不能认为式

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ik}-\frac{\partial\psi}{\partial F_{iJ}}F_{kJ}\right)v_{i,k}=0 \qquad (5\cdot30)$$

中括号因子必须为零，而只能认为它须与 δ_{ik} 成正比，即

$$\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ik}-\frac{\partial\psi}{\partial F_{iJ}}F_{kJ}=-p\delta_{ik}$$

式中 p 为任意标量。

注意到对不可压缩材料 $\rho=\rho_0$，则即由上式得到不可压缩条件下 σ_{ik} 的表达式

$$\sigma_{ik}=F_{kJ}\frac{\partial\psi}{\partial F_{iJ}}-p\delta_{ik} \qquad (5\cdot31)$$

即在体积不可压缩的附加条件下，本构方程中的应力只能决定到差一个任意常数 p 的程度，此常数只能通过平衡条件、边界条件加以确定。这里的讨论同第七章中关于不可压缩超弹性材料的讨论(参见(7:4·35)式)是一致的，只不过这里的结论适合于一般耗散型材料。

§9·6 客观性原理

在上面引入的五条公理中，确定性原理与局部作用原理是显而易见的。对衰减记忆原理与等存在性原理我们也已作了讨论，下面就来研究具有重要意义的客观性原理。

客观性原理(Objectivity Principle)，又称坐标无差异原理(material indifference)或空间同性原理(isotropy of space)，它表明的是这样一个不言自明的事实，即本构关系既然表明的是材料本身的属性，那么它就不应随观察者的不同而不同。或者更确切地说，如果甲乙两观察者分处于两不同的时空坐标系($\bar{x}$，$\bar{t}$)和(x，t)中，此两坐标系各有各的坐标原点和时间原点，且其间的变换关系又保证了任意两点间的距离和时间间隔不随此两坐标系的选择而变化，则甲乙两人建立的本构关系的形式应当相同。以式(5·2)为例，设该式表

达的材料的本构关系是在时空系（ x， t ）中的甲写出的，则在（ $\overline{x}$， $\overline{t}$ ）时空系中的乙写出的本构关系就应具有同样的泛函形式$\mathcal{F}$，即

$$\overline{\sigma}(\overline{t})=\mathop{\mathcal{F}}_{\overline{\tau}=-\infty}^{\overline{t}}\left(\overline{\mathbf{F}}(\overline{\tau})\right)=\mathcal{F}(\overline{\mathbf{F}}^{t}) \tag{6·1}$$

式中$\overline{\sigma}$、$\overline{\mathbf{F}}$是新坐标系下的应力张量和变形梯度，它们当然与式(5·2)表达的旧坐标系下的σ和$\mathbf{F}$不同，但泛函$\mathcal{F}$的形式却不应改变。这一公理对本构关系的建立，给出了重要的约束条件，是建立本构关系时必须遵循的准绳。

下面我们从以下几个方面较深入地展开对客观性原理的讨论。

Ⅰ、时空系的变换

客观性原理阐明不同时空系中本构方程形式间的关系，因此在进入客观性原理的讨论之前，我们先讨论时空坐标系（简称时空系）的变换，以及在时空系变换下各物理、力学量的变换规律。

设物体的物质坐标 $\mathbf{X}$ 保持不变，而物体的瞬时构形在时空系ϕ中的坐标为(x， t)，而在时空系$\overline{\phi}$中的坐标为（ $\overline{x}$, $\overline{t}$ ），两者间满足下述变换关系

$$\overline{x}=\mathbf{b}(t)+\mathbf{Q}(t)x \tag{6·2}$$

$$\overline{t}=t+a \tag{6·3}$$

式中 a 为常数，$\mathbf{b}(t)$和$\mathbf{Q}(t)$仅依赖于时间，$\mathbf{b}(t)$为ϕ系的坐标原点在$\overline{\phi}$系中具有的坐标，$\mathbf{Q}(t)$为正交张量，即它满足

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{T}=\mathbf{Q}^{T}\mathbf{Q}=\mathbf{I} \tag{6·4}$$

当

$$det\mathbf{Q}=1 \tag{6·5}$$

时，$\mathbf{Q}$ 为旋转变换，在变换式(6·2)下，时空系$\overline{\phi}$相对时空系ϕ作相对运动。而当

$$det\mathbf{Q}=-1 \tag{6·6}$$

时，则为反演变换。应该特别指出的是在变换式(6·2)和(6·3)下任意两点P、P'间的时间间隔与空间距离保持不变。事实上若设P与P'点在新旧两时空系中的坐标分别为

$$P:\ \mathbf{x}_1,\ t_1;\quad \overline{\mathbf{x}}_1,\ \overline{t}_1$$

$$P':\ \mathbf{x}_2,\ t_2;\quad \overline{\mathbf{x}}_2,\ \overline{t}_2$$

则由式(6·2)和(6·3)显然有

$$\overline{t}_2-\overline{t}_1=t_2-t_1 \tag{6·7}$$

$$\overline{\mathbf{x}}_2-\overline{\mathbf{x}}_1=\mathbf{Q}(t)(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1) \tag{6·8}$$

设在两时空系中两点间的距离分别以ΔS与$\Delta\overline{S}$表之，则

$$\begin{aligned}(\Delta\overline{S})^2&=(\overline{\mathbf{x}}_2-\overline{\mathbf{x}}_1)^T(\overline{\mathbf{x}}_2-\overline{\mathbf{x}}_1)=\\&=(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)^T\mathbf{Q}(t)^T\mathbf{Q}(t)(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\\&=(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)^T(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)=(\Delta S)^2\end{aligned} \tag{6·9}$$

式(6·7)与(6·9)即证明了变换(6·2)与(6·3)具有保持任意两点间时间差与距离不变的性质。由此可见空间距离矢量 v 在不同时空系上观察时其大小相同，不同的只是方位，这样的矢量称为客观量。一般地称当时空系变换时满足下述变换关系的标量 f 、矢量 $\mathbf{b}$ 和二阶张量 $\mathbf{T}$ 为客观量

$$\overline{f} = f, \quad \overline{\mathbf{V}} = \mathbf{Q}\mathbf{V}, \quad \overline{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \tag{6·10}$$

对客观量来说，当时空系变换时，它们的方位发生了变化，但其本身的几何或物理内涵保持不变。

Fuler 应力张量 σ 是客观量，即它满足

$$\overline{\sigma} = \mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T \tag{6·11}$$

事实上由 Cauchy 应力定理有

$$\mathbf{T} = \sigma\mathbf{n} \qquad (\text{在}\ \Phi\ \text{上观测}) \tag{6·12a}$$

$$\overline{\mathbf{T}} = \overline{\sigma}\ \overline{\mathbf{n}} \qquad (\text{在}\ \overline{\Phi}\ \text{上观测}) \tag{6·12b}$$

这里 $\overline{\mathbf{T}}$ 和 $\overline{\mathbf{n}}$ 分别为时空系 $\overline{\Phi}$ 下的单位面积力矢量和单位外法线矢量，它们与 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{n}$ 的关系由式(6·10)的第二式给出

$$\overline{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{n}} = \mathbf{Q}\mathbf{n} \tag{6·13}$$

代入式(6·12b)可得

$$\mathbf{Q}\mathbf{T} = \overline{\sigma}\mathbf{Q}\mathbf{n}$$

或

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T\overline{\sigma}\mathbf{Q}\mathbf{n}$$

将上式同式(6·12a)相减，再由 $\mathbf{n}$ 的任意性得

$$\sigma = \mathbf{Q}^T\overline{\sigma}\mathbf{Q}$$

上式在左乘 $\mathbf{Q}$、右乘 $\mathbf{Q}^T$ 后即证明变换关系(6·11)成立。

变形梯度张量 $\mathbf{F}$ 不是客观量，因为它的变换关系不符合式(6·10)第三式的张量变换规律

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{\partial\overline{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{Q}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{Q}\mathbf{F} \tag{6·14}$$

可见张量 $\mathbf{F}$ 按矢量规律变换。下面我们还将看到，Green 应变张量 $\mathbf{E}$ 等也不是客观量，但这并不是说它们不是变形的客观度量，这一点我们在下面详细讨论。

Ⅱ. 客观性应变张量与非客观性应变张量

注意到本构方程中既有以 Green 应变张量 E_{IJ}（或 C_{IJ}）作为基本变量的表达形式（如式8：3·28a），又有以 Almansi 应变张量 $\mathbf{e}_{ij}$（或 $\mathbf{B}_{ij}$）作为基本变量的表达形式（如式7：4·28），这两种应变张量在瞬时构形座标架旋转时，其座标分量的变换特性是完全不同的。事实上如第二章例2·2已表明的那样，在物体作刚性转动时（这相当于物体不动，坐标架作相反方向转动），位于原坐标架上的观测者甲与位于旋转坐标架上的观测者乙观察到的 Green 应变张量 $\mathbf{E}$ 和右 Cauchy-Green 张量 $\mathbf{C}$ 是一致的，即

$$\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{C} \tag{6·15}$$

$$\overline{\mathbf{E}}=\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{C}}-\overline{\mathbf{I}})=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I})=\mathbf{E} \tag{6·16}$$

而甲、乙两观测者观察到的 Almansi 应变张量 $\mathbf{e}$ 和左 Cauchy-Green 张量 $\mathbf{B}$ 则有通常张量变换关系

$$\overline{\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{F}}\overline{\mathbf{F}}^T=\mathbf{QFF}^T\mathbf{Q}^T=\mathbf{QBQ}^T \tag{6·17}$$

$$\overline{\mathbf{e}}=\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{I}}-\overline{\mathbf{B}}^{-1})=\frac{1}{2}(\mathbf{QIQ}^T-\mathbf{QB}^{-1}\mathbf{Q}^T)=\mathbf{QeQ}^T \tag{6·18}$$

可见 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{e}$ 是客观量，而 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{E}$ 则不是。但这并不是说 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{E}$ 不能作为变形的客观度量，更不是说 $\mathbf{F}$、$\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{E}$ 诸量不能在本构方程中使用。这里的关键在于有限应变张量与Euler 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 等有着重要的差别，后者是可在一种构形即瞬时构形中下定义的张量而前者则必须同时考虑瞬时构形与变形前构形，或必须联系物质座标与瞬时座标的相对关系去定义才有确切的意义。这种张量显然与通常在一个座标系中定义的张量有着座标变换性质上的不同特点，其变换律必须在综合考虑物质坐标架和瞬时坐标架变换情况下才能确定。上面各变形张量的变换律是在物质坐标架不变换仅瞬时坐标架变换下得到的变换律，而从 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{E}$ 的分量 $C_{IJ}=x_{k,I}x_{k,J}$ 和 $E_{IJ}=\frac{1}{2}(x_{k,I}x_{k,J}-\delta_{IJ})$ 可见它们在瞬时标架中作和因而在瞬时标架变换下看不出变化来。相反，若瞬时标架不变换，仅物质标架由$(\mathbf{X},\ t)$变换到$(\overline{\mathbf{X}},\overline{t})$，且其变换式同样保持任意两点间的时间差和距离不变，亦即

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{X}}&=\mathbf{b}_0(t)+\mathbf{Q}_0(t)\mathbf{X}\\ \overline{t}&=t+a\end{aligned} \tag{6·19}$$

其中 $\mathbf{Q}_0(t)$ 为正交张量，则有

$$\overline{\mathbf{F}}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\overline{\mathbf{X}}}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}\cdot\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\overline{\mathbf{X}}}=\mathbf{FQ}_0^T \tag{6·20}$$

$$\overline{\mathbf{C}}=\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}}=\mathbf{Q}_0\mathbf{F}^T\mathbf{F}\,\mathbf{Q}_0^T=\mathbf{Q}_0\mathbf{C}\,\mathbf{Q}_0^T \tag{6·21}$$

$$\overline{\mathbf{E}}=\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{C}}-\overline{\mathbf{I}})=\frac{1}{2}(\mathbf{Q}_0\mathbf{C}\,\mathbf{Q}_0^T-\mathbf{QIQ}_0^T)=\mathbf{Q}_0\,\mathbf{EQ}_0^T, \tag{6·22}$$

即 $\mathbf{C}$、$\mathbf{E}$ 按张量规律变换，而这时 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{e}$ 保持不变，这是因为它们的分量 $B_{ij}=x_{i,K}x_{j,K}$ 和 $e_{ij}=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-X_{K,i}X_{K,j})$ 是在物质标架中作和，因而在物质标架变换下看不出变化来。

由上可见，若综合考虑两个标架的变换，则两种应变张量 $\mathbf{E}$、$\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{e}$、$\mathbf{B}$ 均具有张量的变换规律，这反映了它们几何内涵的不变性和客观性，因而所有这些变形张量均能作为变形的客观度量而在本构方程中使用。这同反映物体运动速率这样一类的非客观量如速度 $\mathbf{v}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$（或涡旋张量$\mathbf{W}$）等不同，这些量明显地依赖于时空系（或观测者）的运动，在时空系变换时不单改变其方位，而且还改变其大小（模）。

Ⅲ．用客观量建立的本构方程

我们首先讨论本构关系中应力张量与应变张量都是客观量的情形，这时本构方程应表成

Euler 应力张量 σ 与 Almansi 应变张量 $\mathbf{e}$ 或 Cauchy-Green 张量 $\mathbf{B}$ 的某种泛函或函数关系。若设在某一时空系中建立的本构方程为

$$\sigma = \mathbf{F}(\mathbf{B}) \tag{6·23}$$

则根据客观性原理，在另一作相对运动的时空系中建立的本构方程形式应当相同，即应有

$$\bar{\sigma} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{B}}) \tag{6·24}$$

将式(6·11)和(6·17)代入上式并注意(6·23)式得

$$\mathbf{F}(\mathbf{QBQ}^T) = \mathbf{QF}(\mathbf{B})\mathbf{Q}^T \tag{6·25}$$

式(6·25)即客观性原理对用 σ 和 $\mathbf{B}$ 建立的本构方程的具体要求。例如式(7:4·28)表达的超弹性材料的本构方程就符合这一要求，事实上，该式的 $\mathbf{F}(\mathbf{B})$ 为

$$\mathbf{F}(\mathbf{B}) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{B} + \alpha_2\mathbf{B}^2 \tag{6·26}$$

而

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\bar{\mathbf{B}}) &= \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\bar{\mathbf{B}} + \alpha_2\bar{\mathbf{B}}^2 \\ &= \alpha_0\mathbf{QIQ}^T + \alpha_1\mathbf{QBQ}^T + \alpha_2\mathbf{QBQ}^T\mathbf{QBQ}^T \\ &= \mathbf{Q}(\alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{B} + \alpha_2\mathbf{B}^2)\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{QF}(\mathbf{B})\mathbf{Q}^T\end{aligned} \tag{6·27}$$

由此得证，

Ⅳ．用非客观量建立的本构方程

现考虑本构关系中的应力张量与应变张量都不是客观量的情形。如前所述，Green 应变张量 $\mathbf{E}$ 与右 Cauchy-Green 张量 $\mathbf{C}$ 不是客观量，它们在时空系变换时保持不变。现在提出的问题是由这些非客观量组成的本构关系是否符合客观性原理的要求，其中最突出的就是由 $\mathbf{E}$ 等表述的 Coleman 关系是否符合客观性原理的要求。首先，我们证明第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{S}$（其分量 S_{IJ}）在时空系变换时也保持不变。事实上，由(6·11)、(6·14)式及式(7:1·6b)，我们有

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} &= \bar{J}\ \bar{\mathbf{F}}^{-1}\ \bar{\sigma}(\bar{\mathbf{F}}^{-1})^T \\ &= J(\mathbf{QF})^{-1}\mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^T)^T \\ &= J\mathbf{F}^{-1}\sigma(\mathbf{F}^{-1})^T = \mathbf{S}\end{aligned} \tag{6·28}$$

其次，我们要指出，根据客观性原理的要求，Helmholtz 自由能应表成 E_{IJ} 或 C_{IJ} 的泛函，考虑自由能泛函（请读者牢记在式(5·2)中介绍的 t 作为上标的泛函的涵义）

$$\psi = \Phi(\mathbf{F}^t, \theta) \tag{6·29}$$

客观性原理要求在时空系变换时其泛函形式 Φ 保持不变，即

$$\bar{\psi} = \Phi(\bar{\mathbf{F}}^t, \bar{\theta}^t) \tag{6·30}$$

注意到标量 ψ 和温度 θ 在座标系变换时的不变性（参见(6·10)式的第一式）及式(6·14)有 $\bar{\psi} = \psi$，$\bar{\theta}^t = \theta^t$，及 $\bar{\mathbf{F}}^t = \mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t$，上式可写成

$$\psi = \Phi(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t, \theta^t) \tag{6·31}$$

引入极分解

$$\mathbf{F}^t = \mathbf{R}^t\mathbf{U}^t \tag{6·32}$$

则式(6·31)成为

$$\psi = \Phi(\mathbf{Q}^t\mathbf{R}^t\mathbf{U}^t, \theta^t)$$

由于时空系变换的旋转矩阵 $\mathbf{Q}^t$ 的任意性，可取 $\mathbf{Q}^t = (\mathbf{R}^t)^T$，则由上式得

$$\psi = \Phi(\mathbf{U}^t, \theta^t) \tag{6·33}$$

或由 $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$，上式又可写成

$$\psi = \Phi(\mathbf{E}^t, \theta^t) \tag{6·34}$$

或

$$\psi = \Phi(\mathbf{C}^t, \theta^t) \tag{6·35}$$

（当然，式(6·33)、(6·34)和(6·35)三式Φ的形式是各不相同的）可见根据客观性原理，自由能ψ应表为 Green 应变张量 $\mathbf{E}$ 或右 Cauchy-Green 张量 $\mathbf{C}$ 的历史的泛函。

根据 Coleman 关系式(5·27)可得用非客观量 $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{E}$ 建立的本构方程

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{f}(\mathbf{E}^t, \theta^t) \tag{6·36}$$

它显然满足客观性原理的要求，事实上若设在另一作相对运动的时空系中的本构方程为

$$\overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{f}}(\overline{\mathbf{E}}^t, \overline{\theta}^t) \tag{6·37}$$

则根据变换律(6·28)、(6·16)和标量的不变性由上式可得

$$\mathbf{S} = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{E}^t, \theta^t) \tag{6·38}$$

上式与式(6·36)比较可见应有$\overline{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$，即满足不同时空系中建立的本构关系的形式相同的要求。

这里我们提请读者注意的是，客观性原理要求的仅是本构关系的形式相同，而不是要求其有关的变量值（如 $\mathbf{E}$、$\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{e}$、$\mathbf{B}$）和函数值（如 $\mathbf{S}$ 或 σ）也相同，这些变量值和函数值在不同的时空系中可取不同的值。

V. 客观性原理在建立其它本构方程中的应用

现在研究客观性原理对其它各种本构关系给出了怎样的限制条件。考虑用客观性量 σ（Euler 应力张量）与非客观性量 $\mathbf{F}$（变形梯度张量）建立的简单物质的本构关系(5·2)式

$$\sigma = \mathfrak{F}(\mathbf{F}^t)$$

根据客观性原理，在另一作相对运动的时空系中建立的本构方程的形式应当相同，即（见(6·1)式）

$$\overline{\sigma} = \mathfrak{F}(\overline{\mathbf{F}}^t)$$

将变换式(6·11)和(6·14)代入上式得

$$\mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T = \mathfrak{F}(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t) \tag{6·39}$$

两边左乘 $\mathbf{Q}^T$ 右乘 $\mathbf{Q}$ 并利用(5·2)式得

$$\mathfrak{F}(\mathbf{F}^t) = \mathbf{Q}^T\mathfrak{F}(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t)\mathbf{Q} \tag{6·40}$$

同样引入极分解 $\mathbf{F}^t = \mathbf{R}^t\mathbf{U}^t$ 代入上式右边，并由于 $\mathbf{Q}^T$ 的任意性而取 $\mathbf{Q}^t = \mathbf{R}^{tT}$ 及$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$可得

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbf{R}\mathfrak{F}(\mathbf{R}^{tT}\mathbf{R}^t\mathbf{U}^t)\mathbf{R}^T \\ &= \mathbf{R}\mathfrak{F}(\mathbf{U}^t)\mathbf{R}^T\end{aligned} \tag{6·41a}$$

上式表明，只有纯变形的历史才影响现在的瞬时应力，而Euler应力与过去的转动史$\mathbf{R}^t$无关，但却明显地依赖于现时的转动$\mathbf{R}$，这使它在本构方程中的应用受到了限制。为此可引入一个新的应力$\mathbf{T}=\mathbf{R}^T\sigma\mathbf{R}$，由式(6·41a)我们有

$$\mathbf{T}=\mathbf{R}^T\sigma\mathbf{R}=\mathcal{F}(\mathbf{U}^t) \tag{6·41b}$$

由上式可见它只取决于伸长变形的历史$\mathbf{U}^t$，是旋转不变的，因此在建立本构方程时使用$\mathbf{T}$作为一种新的应力度量存在着一定的优越性，有兴趣的读者请参阅文献[20]

现讨论客观性原理对某些率形式的本构方程（例如次弹性材料的本构方程）的具体限制。在讨论之前先须求出某些量在时空系变换时的变换规律。

速度的变换律：由式(6.2)得

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}&=\dot{\bar{\mathbf{x}}}=\dot{\mathbf{b}}+\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x}+\mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}}\\&=\dot{\mathbf{b}}+\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x}+\mathbf{Q}\mathbf{v}\end{aligned} \tag{6·42}$$

速度梯度的变换律：

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{L}}&=\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}}{\partial\bar{\mathbf{x}}}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{b}}+\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x}+\mathbf{Q}\mathbf{v})\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\bar{\mathbf{x}}}\\&=(\dot{\mathbf{Q}}+\mathbf{Q}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}})\mathbf{Q}^T\\&=\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T+\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T\end{aligned} \tag{6·43}$$

可见速度和速度梯度均非客观量。由式(6·4)可得

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T+\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T=0 \tag{6·44a}$$

或

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T+(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^T=0 \tag{6·44b}$$

即 $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$为反对称张量。利用式(6·43)和(6·44a)可得涡旋张量和形变率的变换律如下：

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{W}}&=\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{L}}-\bar{\mathbf{L}}^T)\\&=\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T+\mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T\end{aligned} \tag{6·45}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{V}}&=\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{L}}+\bar{\mathbf{L}}^T)\\&=\mathbf{Q}\frac{1}{2}(\mathbf{L}+\mathbf{L}^T)\mathbf{Q}^T\\&=\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T\end{aligned} \tag{6·46}$$

可见形变率$\mathbf{V}$为客观量，但涡旋张量$\mathbf{W}$不是。

现求Euler应力张量的物质导数$\dot{\sigma}$的变换律：

$$\dot{\bar{\sigma}}=(\mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T)^{\cdot}=\dot{\mathbf{Q}}\sigma\mathbf{Q}^T+\mathbf{Q}\sigma\dot{\mathbf{Q}}^T+\mathbf{Q}\dot{\sigma}\mathbf{Q}^T \tag{6·47}$$

可见 Euler 应力张量的物质导数不是客观量，它的变换甚至与时空系间相对转速有关。但 Euler 应力张量的 Jaumann 率 σ^∇ 则是客观量。事实上由式(6·1·3b)可得

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}^\nabla &= \dot{\overline{\sigma}} - \overline{W}\overline{\sigma} - \overline{\sigma}\,\overline{W}^T \\ &= \dot{Q}\sigma Q^T + Q\sigma\dot{Q}^T + Q\dot{\sigma}Q^T - (\dot{Q}Q^T + QWQ^T)Q\sigma Q^T \\ &\quad - Q\sigma Q^T(Q\dot{Q}^T + QW^TQ^T) \\ &= Q(\dot{\sigma} - W\sigma - \sigma W^T)Q^T \\ &= Q\sigma^\nabla Q^T \end{aligned} \qquad (6\cdot48)$$

因此在本构方程中应当使用 σ^∇，而不应使用 $\dot{\sigma}$。可以证明，若在本构方程中出现 $\dot{\sigma}$，则客观性原理得不到满足。事实上若设在某一时空系中本构方程为

$$\dot{\sigma} = f(V) \qquad (6\cdot49)$$

则根据客观性原理，在另一作相对运动的时空系中建立的本构方程形式应当不变，即

$$\dot{\overline{\sigma}} = f(\overline{V}) \qquad (6\cdot50)$$

将变换式(6·47)和(6·46)代入上式得

$$\dot{Q}\sigma Q^T + Q\sigma\dot{Q}^T + Q\dot{\sigma}Q^T = f(QVQ^T) \qquad (6\cdot51)$$

取 t 时刻之 $Q = I$，但 $\dot{Q} \neq 0$，则得

$$\dot{Q}\sigma + \sigma\dot{Q}^T + \dot{\sigma} = f(V) \qquad (6\cdot52)$$

将上式与(6·49)式比较得必须满足下式时

$$\dot{Q}\sigma + \sigma\dot{Q}^T = 0 \qquad (6\cdot53)$$

客观性原理才能得到满足，而这在一般情况下是做不到的，因此 $\dot{\sigma}$ 不能在本构关系式中出现，而必须采用 Euler 应力的 Jaumann 率 σ^∇。但在小位移、转动与应变相比是同级或更高级小量情况下，用 $\dot{\sigma}$ 代替 σ^∇ 时其引起的误差可以忽略。

现设本构方程的形式为

$$\sigma^\nabla = f(V, W) \qquad (6\cdot54)$$

当从时空系 (x, t) 变换到时空系 $(\overline{x}, \overline{t})$ 时，根据客观性原理我们有

$$\overline{\sigma}^\nabla = f(\overline{V}, \overline{W}) \qquad (6\cdot55)$$

将变换式(6·48)、(6·46)和(6·45)代入上式得

$$Q\sigma^\nabla Q^T = f(QVQ^T, \dot{Q}Q^T + QWQ^T) \qquad (6\cdot56)$$

上式必须对任意的 Q 成立，我们取 $Q(t) = I$，但 $\dot{Q}(t) \neq 0$，则上式化为

$$\sigma^\nabla = f(V, \dot{Q} + W) \qquad (6\cdot57)$$

此式同(6·54)式比较，由于 $\dot{Q}$ 是任意的，可见 f 不应是 W 的函数，而只是 V 的函数，因此本构方程(6·54)和(6·55)应写成

$$\sigma^{\nabla} = f(V) \tag{6·58}$$

$$\overline{\sigma^{\nabla}} = Q\sigma^{\nabla}Q^T = f(\overline{V}) = f(QVQ^T) \tag{6·59}$$

这样，根据客观性原理的要求，f 应满足

$$Qf(V)Q^T = f(QVQ^T) \tag{6·60}$$

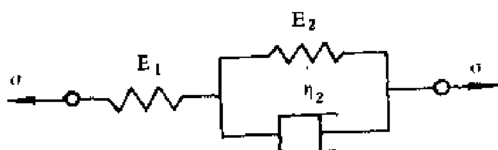
最后我们要说明一下，前面我们叙述客观性原理时，采用两个时空系，即站在相互作相对运动的不同时空系上的两个观测者对空间同一物体所建立的本构方程的形式应当相同。但是我们也可只采用一个时空系而让物体作为整体在空间作刚体运动，这时客观性原理可叙述为：本构方程应不依赖于物体作为一个整体在空间所作的刚体运动。而客观量仍然可用式(6·10)来定义，只不过式中的 Q 已不是指两个时空系的相对转动，而是指物体作为一个整体在该时空系所作的刚体运动。当然，这并不排斥物体自身的变形运动。

我们还应注意区别物质各向同性与空间各向同性（即客观性原理），虽然它们应满足的约束形式都如式(6·25)那样是相同的。物质各向同性是指应变场在空间不动但物质在空间作刚体转动时应力应变间的本构关系式不变，或者根据相对运动原理也可看成物质在空间不动但应变场在空间作转动时应力应变间的本构关系形式不变(由此应力场必作相同转动)。而空间各向同性是指物体作为整体（包括物质主轴和应力、应变场）在空间作刚体运动时本构方程的形式保持不变，它显然也对各向异性材料成立。

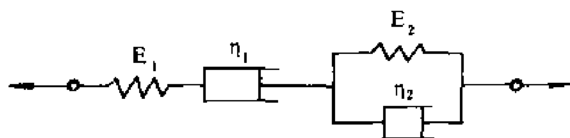
习　　题

9·1　求证 Maxwell 流体、Kelvin 固体和标准线性固体的松驰模量 $E(t)$、蠕变柔度 $C(t)$ 分别由式(2·36)—(2·38)及(2·44)—(2·46)表示。

9·2　试应用 Kelvin 固体的应力应变关系去求图示三参数固体的应力应变关系。



题9·2图　三参数模型

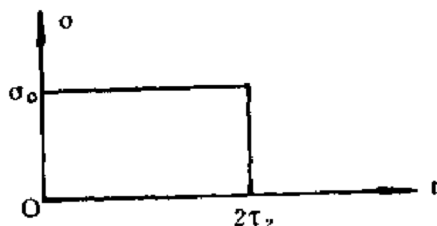


题9·3图　四参数模型

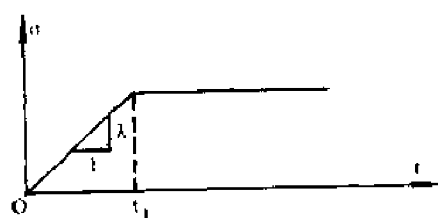
9·3　决定图示的四参数模型的应力应变方程，让 $\eta_1 \to \infty$ 后将其结果与上题的结果进行比较。

9·4　蠕变——恢复实验的步骤先加载至 σ_0，并保持一段时间然后立即卸荷，试决定三参数线性固体(题9·2图)在图示的加载条件下的蠕变——恢复响应。

9·5　设Kelvin 固体承受如图示的加载过程，试决定其应变发展规律及时间趋于无穷大



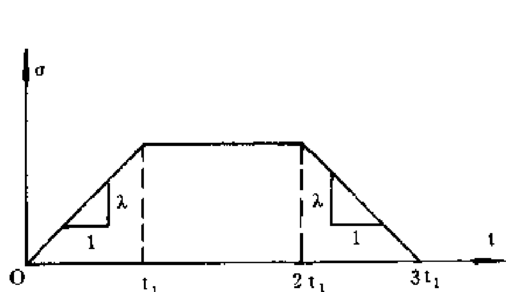
题9·4图　蠕变——恢复试验



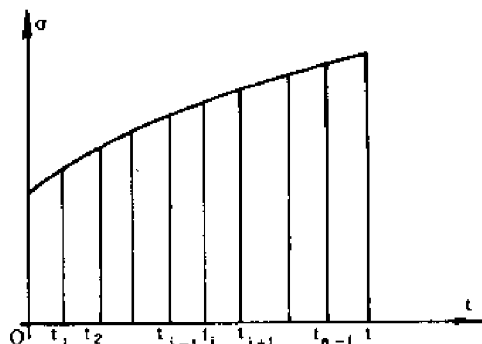
题9·5图　加载曲线

时的变形值。

9·6 直接应用迭加原理以决定 Kelvin 固体受图示的载荷后的响应特性。



题9·6图 加载曲线



题9·7图 应力史的分割

9·7 将应力史分成很多垂直条（见本题图），利用迭加原理证明下述积分型线性粘弹性方程：

$$\varepsilon(t)=\sigma(t)J(0)+\int_0^t\sigma(t-\tau)\dot{J}(\tau)d\tau$$

9·8 设某线性粘弹性材料的松驰模量函数为：

$$G(t)=G_2e^{-t/T_2}$$

式中 G_2 与 T_2 为材料常数。要求：

（i） 决定蠕变柔度函数；

（ii） 确定常数 T_2，条件是在松驰实验中 t 为1小时的应力响应值恰为 $t=0$ 时初始应力响应之半。

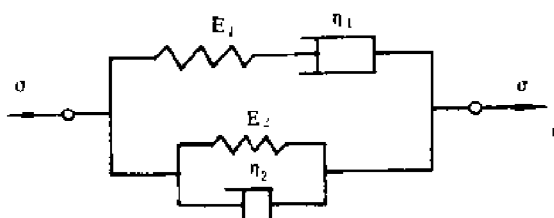
（iii） 用图形表示在上述三种不同的应变史（题9·8图）下应力响应的区别：（a）正弦波，（b）三角波，（c）矩形波。

题9·8图 不同的应变史

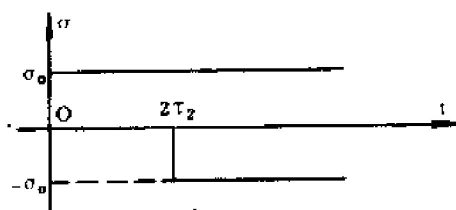
9·9 一根由 Kelvin 固体材料制成的杆受突加的拉伸载荷作用，所造成的应力状态为：$\sigma_{11}=\sigma_0H(t)$，$\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$，其中 σ_0 为常数，试决定在此载荷下的应变ε_{11}的表达式。

9·10 一块矩形 Kelvin 材料放置于一刚性壁的容器内，当施加突加应力 $\sigma_{11}=-\sigma_0H(t)$时，$\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=0$，试决定在此情况下的 ε_{11} 和夹持应力 σ_{22} 和 σ_{33}。

9·11 试从Kelvin 和 Maxwell 模型的应力应变关系去确定图示的 Kelvin-Maxwell 组



题9·11图 Kelvin-Maxwell 组合模型



题9·12图 利用迭加原理研究题9·4图所示的蠕变——恢复试验

合模型的本构关系。

9·12 用迭加原理去求三参数模型的蠕变恢复响应，并将其结果与问题 9·4 中的结果进行比较。

9·13 试用含内变量的不可逆热力学的方法求证图9·12a广义模型的应力应变关系为：

$$\sigma(t)=E_S\varepsilon(t)+\sum_{\alpha=1}^{N}E_\alpha\int_{-\infty}^{t}e^{-\lambda_\alpha(t-\tau)}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}d\tau$$

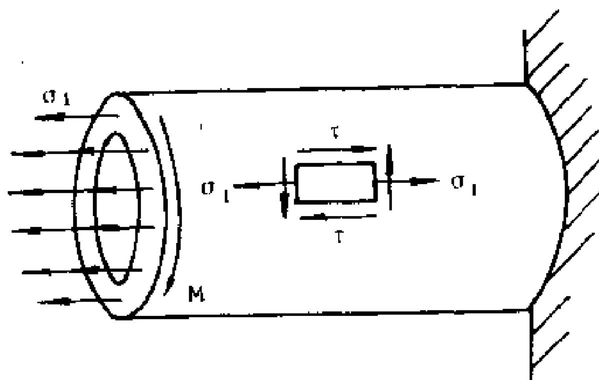
式中 $\lambda_\alpha=E_\alpha/\mu_\alpha$

9·14 设薄壁园筒拉扭时（见本题图）的应力与应变张量可分别表示如下：

$$\underset{\sim}{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & \tau & 0\\ \tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \gamma & 0\\ \gamma & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}$$

材料是各向同性线性粘弹性材料，试在材料可压与不可压两种假设下，给出其本构方程的显式。



题9·14图 薄壁园筒受拉扭组合作用

第十章　经典塑性理论与内蕴时间塑性理论

本章讨论唯象学的塑性理论。经典塑性理论被定义成凡以屈服面的概念作为其理论发展前提与基本假设的理论，而内蕴时间塑性理论则是一切以取决于变形中塑性变形累积程度和材料特性的内蕴时间标度 Z 来描述其变形历史的理论的统称。在 §10·2 中我们对经典塑性理论的基本假设作了明确的阐述，并以此假设与 Drucker公设为纲对该理论的要义进行了讨论。本章用了很大篇幅来叙述内蕴时间塑性理论，对它的基本概念和理论基础作了介绍，应用部分则涉及到弹塑性梁、板和厚壁容器的弹塑性分析、含切口板在循环加载下的弹塑性应变场的分析、应变疲劳与断裂的分析以及无粘土壤本构特性的分析等。

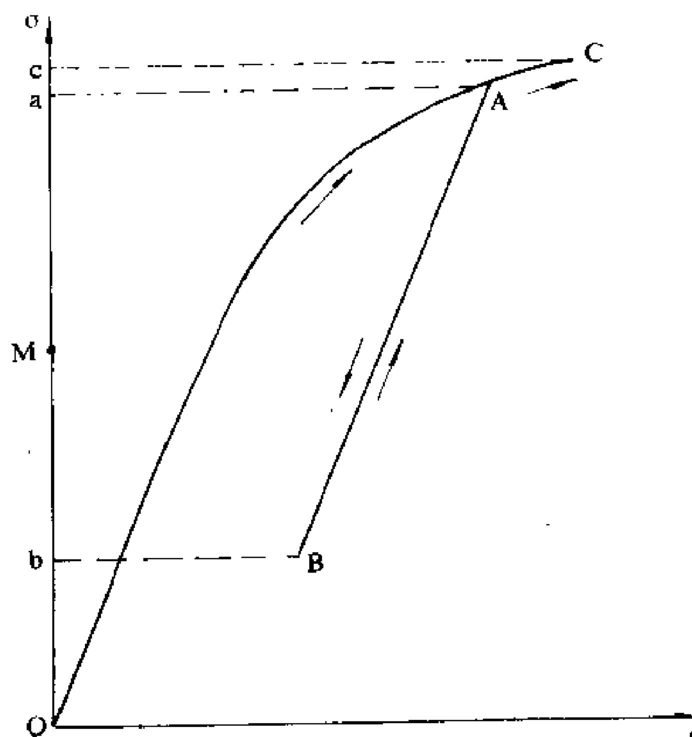


图10·1　理想化的拉伸曲线

§10·1　引　言

塑性理论是一门具有重大理论意义与应用价值的学科。它的历史可以追溯到1864年法国工程师 Tresca 公布他在冲压与挤压方面的实验结果，并建立其著名的屈服准则开始。接着 Saint-Venant(1870) 和 Levy(1870)应用 Tresca 的结果奠定了经典塑性理论初期发展的基础。随后的

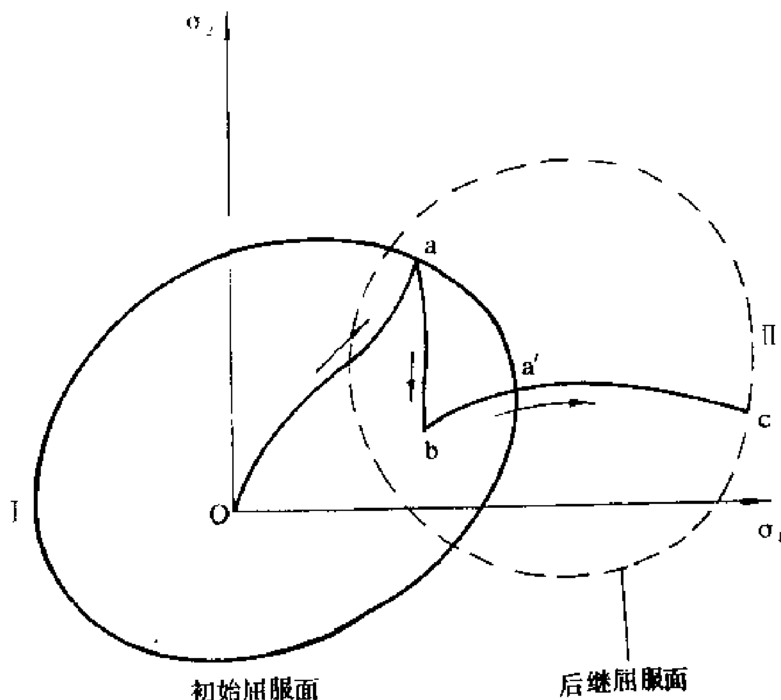


图10·2　从拉伸曲线引伸出来的初始屈服面与后继屈服面的概念

* 本章内容是根据第一作者在"力学进展"、"塑性力学的现代发展"上发表的论文等改写而成。

75年中，虽然不少人作出过重要贡献，例如Mises(1913)，Prandtl(1924)，Hencky (1925)，但总的来说发展是缓慢的，相互间也是不甚协调的。大约在1945年开始，建立一个较严密与统一的经典塑性理论的苗头就已开始出现，而重要的推进来自Prager和Drucker的工作〔21〕、〔22〕、〔23〕，在此以后经典塑性理论进入了一个全面发展的时期，在实际中也获得了较为广泛的应用。后者主要包括确定弹性工作范围，及基于理想塑性概念而进行的塑性分析（包括极限分析，金属成型的流动分析），及某些简化条件下的弹塑性分析和稳定分析等。

经典塑性理论的基本概念是从一种理想化的拉伸曲线（图10·1）中起源并引伸出来的，发展理论的目的则是把单轴拉伸的实验结果推广到三度空间。由于早期的结构材料（如低碳钢）在应力控制的常温拉伸实验中，屈服点的出现比较明显，因此该理论以屈服面作为它的基本假设和前提是很自然的。具体地说初始屈服点拓展成应力空间中的初始屈服面，后继的屈服点引伸为后继的屈服面（图10·2），而该理论的下述三大基本组成也与屈服面密不可分，它们是：

（1）初始屈服准则：它确定了塑性变形开始时应力状态服从的规律，即确定初始屈服面的规律。

（2）强化规则：它确定了材料强化后塑性变形进一步发生时应力状态服从的规律，即后继屈服面在应力空间中变化的规律。

（3）流动规则：它确定了塑性应变增量与应力状态及应力增量之间的关系，如表征塑性应变增量与屈服面垂直的垂直性法则。

由以上讨论可见，应用经典塑性理论的先决条件在于掌握屈服面的运动规律，而这是比较困难的。一方面企图通过二维或三维实验去得到材料的后继屈服面是十分繁杂而难以完成的工作；另一方面由于后继屈服面在空间变化的情况十分复杂（一般来说，它包含着移动、膨胀、旋转和歪扭），因而尽管自五十年代以来人们提出了数以几十计的各种强化模型，但不幸的是它们与实验结果的吻合程度都不能令人满意。这种情况大体上可用美国Los Alamos实验室Hecker的下述一段话来加以说明："这些计及不同理论的强化规则的任何一个的实验验证被证明是难以捉摸的。在预言较大范围的实验观察中没有一个是成功的，并且由于很多规则包含了太多的调整参数，使用很麻烦而失去了实际价值"。另外人们已经发现后继屈服面的尺寸和形状因屈服点的定义不同而受到很大影响。这些情况使经典塑性理论的应用范围受到了较大的限制，不能满足近代很多实际问题的迫切需要。

大多数材料的屈服现象通常表现为从线性到非线性应力应变关系的逐渐过渡（反向加载时即使对低碳钢也没有明显的屈服点）。因而严格地说，作为经典塑性理论的基础和基本前提的屈服面是一种理想化的概念。从经典数学塑性理论的观点来看，一个规定弹性区范围的屈服面的概念是必不可少的。这样才可按该理论的垂直性法则，去确定塑性应变的增量。如果塑性变形在加载一开始就出现（象对很多材料适用的Osgood-Ramberg关系描述的那样；这从位错的观点来看也是合理的），则初始屈服面将收缩成一点，因而塑性应变增量的方向就变为不定的了。这样理想化的屈服面的概念使经典塑性理论难以用统一的观点去处理一开始加载就屈服的材料。进而由于后继屈服面依赖于屈服点的定义，则由垂直性法则确定的塑性应变增量也依赖于人为的定义，对一个特定的和复杂的加载历史，就会造成不同的塑性应

变史，这与实际情况是不相吻合的。

由以上分析可见，屈服面的概念严格说来是某种人为的理想化，但实践证明这种理想化并不一定能带来简化（例如有限元计算中，在增量加载使任一单元应力状态超过屈服面后，原则上应当回到原状态，调整载荷后再重新加载，以便使应力状态恰好落在屈服面上，这既浪费了计算机时间，也难确保精度。）因而当我们面临发展更现实的塑性模型的任务时，我们有理由不坚持这种理想化，去发展一种不用屈服面的概念作为其理论前提和基本假设的塑性理论，这导致了内时塑性理论的发展。

内时塑性理论最初是由 K.C.Valanis 于1971年提出来的。它是所有以下述基本概念建立起来的理论的一个统称，这个概念就是：塑性和粘塑性等耗散材料内任一点的现时应力状态是该点邻域内整个变形和温度历史的泛函；而特别重要的是该历史是用一个取决于变形中的材料特性和变形程度的内蕴时间标度 Z 来量度的。

用有物理内涵的内蕴时间 Z 去代替一个普适的和绝对的牛顿时间 t 去量度不同材料的不可逆变形的历史，就可更准确和更简便地建立起所研究的材料的本构关系，把众所周知的材料性质及其内部结构变化对于本构关系的重要影响突出到用与之紧密相连的基本变量 Z 来加以描述的程度。内时理论不以屈服面的概念作为其理论发展的基本前提，也不把确定屈服面作为其计算的根据（但不排斥屈服面的后验性的存在）。例如，材料在初始塑性变形阶段的响应特性，不是由拉伸曲线上一个人为定义的屈服点（如 $\sigma_{0.2}$）和有关的初始屈服准则来确定的，而是根据拉伸曲线上偏离线性段的一些点的集合，定出有关的材料函数，再按内时本构关系进行分析的。这种集合包含了材料响应的更多信息，避开了采用一个不是精确的物理量的屈服点及其相应的屈服面而带来的困扰。〔24〕、〔25〕。

在方法论上，内时理论力图去建立较普遍适用的理论体系（可适用于多种材料，并用统一的观点去处理加载和卸载等过程）；而不是去追求较普遍适用的具体准则。例如它不采用假定的强化规则（如随动强化规则等），而是根据该理论推出的解析公式去进行材料强化后的分析的。有趣的是屈服面的概念及随动强化和各向同性强化规则等却可以作为该理论的特殊情形通过理想化和简化而得到。

内时理论是建立在第八章中介绍的以内变量理论为其基本网络的不可逆热力学基础上的。通过对由内变量表征的材料内部组织不可逆变化所必须满足的热力学约束条件的研究，得出了内变量变化所必须满足的规律，从而给出了具体材料在具体条件下的一条特定的不可逆热力学变量的演变途径，由此规定了所研究的材料的本构响应特性，最后它能够以显式的本构方程形式表达出来。

纵观内时理论的特点，不难看出它的理论基础较深广，模型较接近于实际，方法上又特别着重于具体材料在特定条件下的响应特性，因而具有较大的理论意义和实用价值。它可能为一大类材料（金属、土壤、岩石、混凝土和塑料等）的各种不同力学问题的分析（如单调加载及循环加载下各种工程结构的弹塑性响应特性、耗散材料宏观表象与微观机制的综合分析、疲劳与弹塑性断裂、蠕变与松驰、弹塑性波、地震下高层建筑和水工结构的响应特性、弹塑性冲击与稳定、预变形和预应力的影响、有限变形与成型力学分析）在不同程度上提供新的思路和更现实、更便于分析的模型和方法。关于该理论的发展过程实验验证等，请读者

参阅〔26〕。

§10·2 经典塑性理论要义

Ⅰ． 基本假设

前已述及经典塑性理论包含初始屈服准则、强化规则和流动规则三大组成，其基本前提则是由下列假设给出的屈服面的概念。

基本假设 在材料塑性变形的任一阶段，一个取决于应力、塑性应变和材料强化特性的加载函数 f 总是存在的，使得由方程 $f=0$ 描述的应力空间屈服面将限定应力位于其内的材料服从弹性本构定律。这意味着无论是从该超曲面上的点向其内部点的应力变化或其内部点间应力的改变都只产生可以恢复的弹性变形，而当屈服面上某点 p_t 获得应力增量 $d\sigma_{ij}$ 改变至面外的某点 $p_{t'}$ 时，后继屈服面随即经过运动和变形改变为通过 $p_{t'}$ 点的新的空间曲面，在此过程中材料才进一步产生塑性变形并随之强化。唯一的例外是屈服面永不变化的所谓理想塑性材料，对这种理想化了的材料，塑性应变增量将出现在从屈服面上一点至另一点的应力状态的变化过程中。

对上述基本假设的说明与应用将贯穿于本节的各部分中，对它的评论除上节中已涉及的以外，还将在最后一部分中加以补充。在此之前我们简略回顾与该假设有关的一些基础知识，并分成初始屈服准则、强化规则和加卸载准则来加以讨论。

（1）初始屈服准则

初始屈服准则本质上是一维屈服应力的概念在三维应力状态下的推广。设材料开始出现塑性变形时对应的屈服函数为 f_0，则由 $f_0=0$ 表达的应力空间中的曲面将被称之为初始屈服面（注：屈服函数可看成加载函数 f 的一个特例，故以 f_0 记之，对 $f=0$ 的曲面我们将称为后继屈服面或称加载曲面）。根据上述定义 f_0 将只是应力张量 σ_{ij} 的函数，而与强化参数及塑性应变无关。于是初始屈服面（及理想材料的屈服面）将由下述屈服方程描述

$$f_0(\sigma_{ij})=0 \qquad (2\cdot1)$$

作为例子我们给出常温条件下适合于各向同性材料的下列屈服函数。

Von Mises 准则（歪斜能准则）：这一准则认为当第二应力偏量不变量 $T_{(2)}$ 达到某一材料常数 K^2 时就产生屈服，其屈服函数为

$$f_0(\sigma_{ij})=T_{(2)}-K^2 \qquad (2\cdot2a)$$

式中 $T_{(2)}=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$，$K$ 为剪切屈服强度 τ_s。注意到在此准则下拉伸屈服极限 $\sigma_s=\sqrt{3}\tau_s$，则与式(2·2a)相应的初始屈服面方程可写为

$$\tilde{\sigma}-\sigma_s=0 \qquad (2\cdot2b)$$

式中 $\tilde{\sigma}=\sqrt{3T_{(2)}}$ 为等效应力即在拉伸情况下与应力 σ 相等的应力。式(2·2b)表明等效应力 $\tilde{\sigma}$ 达到 σ_s 时材料单元即开始屈服。

Tresca 准则（最大剪应力准则）：这一准则认为材料单元中的最大剪应力达到剪切屈

服极限K时即开始塑性变形，我们有

$$f_0(\sigma_{ij})=\sigma_1-\sigma_3-2K=0 \qquad (2\cdot3)$$

或
$$4T_{(2)}^3-27T_{(3)}^2-36K^2T_{(2)}^2+96K^4T_{(2)}-64K^6=0 \qquad (2\cdot4)$$

式(2·3)只有在应力主轴的标号符合下列条件$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$时才成立，而用不变量$T_{(2)}$和$T_{(3)}$给出的式(2·4)则保证了各向同性材料屈服条件应与轴的标号无关的原理的满足[55]。式(2·2)与(2·4)中不包含第一不变量$T_{(1)}$，即假定屈服函数与静水压力无关，这是根据Bridgmen的实验对金属作出的假定。注意到由主应力σ_1，σ_2和σ_3为座标轴组成的三维主应力空间中（该空间又称为Haigh-Westergeard应力空间），等倾轴op上的应力状态具有三个主应力彼此相等的特点（$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$），故沿该轴分解的应力分量$OA$的变化只改变水压应力的大小（图10·3）。于是由上述假定可知，该点应力的这一分量将不会造成附加的塑性变形，换句话说，只要沿与op垂直的方向的应力分量OB相同，则其屈服条件就相同，这意味着屈服面必然是母线平行于op轴的柱面，此柱面与下述方程给出的π平面的交线，则称之为屈服曲线

$$\pi\text{平面} \qquad \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0 \qquad (2\cdot5)$$

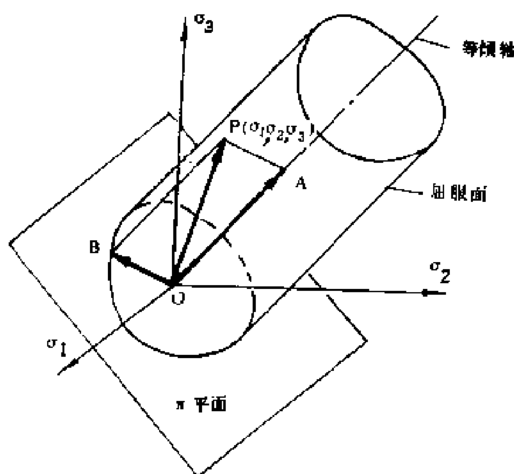


图10·3 主应力空间中的屈服面

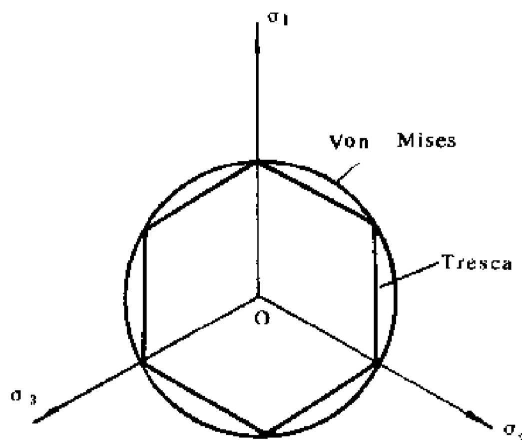


图10·4 屈服曲线

显然π平面是过原点并与op轴垂直的平面，而Mises及Tresca准则给出的屈服面在π平面上的投影则分别为园与六角形（图10·4）。

（2）强化规则

材料单元在初始屈服后继续加载时，随着塑性应变ε_{ij}^p的发展，其性质要产生强化。这种强化一般是塑性应变史的函数，设以参数κ加以表示，则可断定加载函数及后继屈服面的方程分别具有如下形式

加载函数： $f(\sigma_{ij},\ \varepsilon_{ij}^p,\ \kappa)$

后继屈服面方程： $f(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^p,\ \kappa)=0 \qquad (2\cdot6)$

后继屈服面在应力空间中的运动规律是由强化规则给出的，这个规则表明了塑性应变的增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 怎样影响着加载函数的变化。常用的有下面几种

各向同性强化规则 它假定后继屈服面将随塑性应变的加大，而均匀向外扩张，于是在 π 平面上Mises和Tresca准则对应的图形为不断向外扩展的园和六角形。后继屈服面的方程可表示为

$$f = f_0 - \kappa = 0 \quad (2\cdot7a)$$

对Mises准则有

$$f = T_{(2)} - \tau_s^2 - \kappa_\tau \quad (2\cdot7b)$$

或

$$f = \tilde{\sigma} - \sigma_s - \kappa \quad (2\cdot7c)$$

$$\tilde{\sigma} - \sigma_s - \kappa = 0 \quad (2\cdot7d)$$

其中 κ（或 κ_τ）随 $d\varepsilon_{ij}^p$ 加大的定量关系有下述两种假设。一是塑性功强化假设，即假设强化参数只取决于总的塑性功 A_p 而与应变路径无关，A_p 可表示为

$$A_p = \int dW_p = \int \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p \quad (2\cdot8a)$$

二是应变强化假设，即材料强化取决于某种累积的塑性变形。作为这种累积变形的度量，提出过不同的参数，其中比较有名的是 Odqvist 参数 q，它可表示如下

$$q = \int\sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p\, d\varepsilon_{ij}^p} \quad (2\cdot8b)$$

在本节V的例题中，我们还将介绍其它参数及该强化规则在薄壁管弹塑性拉扭组合分析中之应用。

Prager 随动强化规则 它假定屈服面在 π 平面上不改变形状也不旋转，只产生刚性移动。例如当Mises屈服面向拉应力方向移动时，从反方向达到屈服面所需的应力变化就减少了。这解释了在拉伸屈服后其压缩屈服应力小于拉伸屈服应力的Bauchinger效应。Prager给出的屈服面随塑性应变史变化的规则如下

$$f(\sigma_{ij} - r_{ij}) = 0 \quad (2\cdot8c)$$

式中 r_{ij} 表示初始屈服面中心的移动，它可表示为

$$\dot{r}_{ij} = C\dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2\cdot9a)$$

注意到偏斜塑性变形应变 e_{ij}^p 可表示为

$$e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \delta_{ij}\varepsilon_{KK}^p / 3 \quad (2\cdot9b)$$

又由塑性不可压的假定有 $\varepsilon_{KK}^p = 0$，故有

$$e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p \quad (2\cdot9c)$$

于是 prager 随动强化规则可写成

$$dr_{ij} = c d\varepsilon^{p}_{ij} \qquad (2\cdot9d)$$

c 是由实验决定的材料常数，在线性强化的条件下它是常数，上式表明屈服面的移动方向与塑性应变增量的方向一致。在垂直性法则成立的条件下，该方向即与该瞬时加载点处屈服面的法线方向一致。

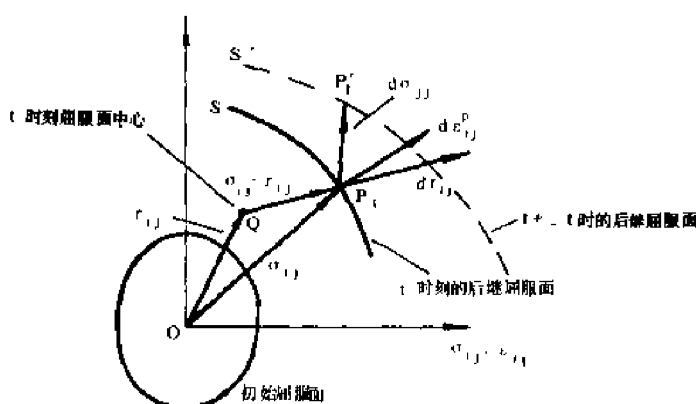


图10·5(a)　表示后继屈服面移动规律的 Ziegler 强化规则

Ziegler 强化规则　它假定屈服面中心的移动方向 dr_{ij} 位于从屈服面的瞬时中心至屈服面上加载点 $P_t(\sigma_{ij})$ 的射线上(图10·5(a))而其量值关系则为

$$\dot{r}_{ij} = \dot{\mu}(\sigma_{ij} - r_{ij}) \qquad (2\cdot10a)$$

式中 μ 是待定的大于零的数。上式亦可写成增量形式

$$dr_{ij} = d\mu(\sigma_{ij} - \gamma_{ij}) \qquad (2\cdot10b)$$

(3)加卸载准则．

由基本假设可直接推出下述结果，即位于屈服面上的点的应力变化可分为下述三种情况：

卸载　卸载被定义为由屈服面上的点进入弹性区的应力变化，其数学定义可表示为

$$f = 0 \qquad \dot{f} < 0 \qquad (2\cdot11)$$

这是因为在时刻 t 满足上述方程意味着过一瞬间 $f < 0$，即进入弹性区，因而式(2·11)表征着卸载。对式(2·6a)微分得到

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^{p}_{ij}}\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \kappa}\dot{\kappa} \qquad (2\cdot12)$$

再注意到在卸载过程中既无塑性应变产生，又无材料强化，即 $\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = 0$，$\dot{\kappa} = 0$，应用这些条件及式(2·11)、(2·12)可得卸载的条件为

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} < 0, \qquad f = 0 \qquad (\text{卸载}) \qquad (2\cdot13)$$

中性变载　根据基本假设，若应力分量变化后只是从一点变至同一屈服面上的另一点，则材料不会进入弹性区，对强化材料也不会产生塑性应变($\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = 0$)及强化($\dot{\kappa} = 0$)，因而称为中性变载，其条件可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} = 0, \qquad f = 0 \qquad (\text{中性变载}) \qquad (2\cdot14)$$

加载　对处于塑性状态的强化材料，加载意味着施加继续产生塑性应变的应力变化，根据基本假设它是由指向屈服面外的应力增量 $d\sigma_{ij}$ 造成的(图10·5)，参照式(2·13)与(2·14)我们容易判断其条件为

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} > 0, \quad f = 0 \qquad (\text{加载}) \qquad (2\cdot15)$$

由式(2·13)—(2·15)可见函数 f 在决定材料是否处于加载上极为重要，这就是它之所以被称为加载函数的原因。应当特别提请读者注意的是，虽然加载时 $\partial f/\partial\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{ij}>0$，但根据基本假设，加载后的点 p_i 仍应处于加载后的屈服面上（图10·5a），即仍应满足式(2·6)给出的后继屈服面方程，这意味着式(2·12)中第一项的增加，恰与塑性应变及其伴随的强化而引起的第二、三项的减小相抵消，从而保证了 $df=0$，即有

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{p}}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}+\frac{\partial f}{\partial\kappa}\dot{\kappa}=0,\quad f=0 \tag{2·16}$$

上式表明后继屈服面的运动与塑性应变的增量及材料性质的强化密不可分。同时还表明在这一设计的理论模式中数学不等式 $f>0$ 没有相应的物理背景。这也意味着在这一模式中应力空间中的点，只有在后继屈服面运动将其包含在内或其上时才会有确定的物理内涵。换句话说按照这一模式，表征真实材料应力状态的点都应含在后继屈服面内或其上，这一观念很清晰地表示（图10·5(b)）在 Tresca 随动强化模型中。由图看出加载点永远处在 π 平面上移动着的后继屈服面上。

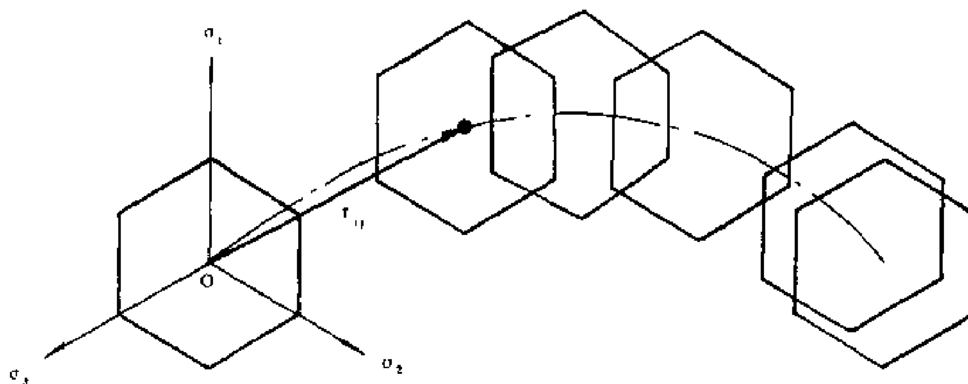


图10·5(b)　π 平面上的 Tresca 随动强化模型

Ⅱ. Drucker 公设

上面的分析指出屈服面与塑性应变率及材料的强化有着密不可分的联系，但是在相当长的历史时期内，人们并不了解这种联系。例如1928年 Von Mises 仿照弹性位势的概念，提出塑性势 φ 以计算塑性应变的增量，即塑性应变增量可由 φ 通过对应力分量的微分而求得，但当时人们并没有认识到塑性势 φ 与加载函数的密切关系。1950年Drucker 提出了其著名的公设，才从理性的高度上搞清了塑性流动规律与加载函数的关系，并明确了屈服面形状所必须满足的外凸性，从而把分散的规则用统一的观点联系起来。有趣的是建立这一统一理论网络的关键则是使含糊的材料强化观念获得明确的定义，由此可见理性化的概念在建立理论中的极端重要性。

在简单拉伸实验中材料强化的概念归结为应力是应变的单调递增函数，对于复杂的应力应变关系和加载路径，问题就没有这样简单。Drucker 用下列方式来研究这一问题，他考虑在应力为 σ_{ij}^{0} 下处于平衡的单元体上缓慢作用一组附加的应力然后又缓慢地将其移去（这里缓慢加卸载是使过程保持在等温条件下）。他用在附加应力作用的过程中以及整个附加应力

的循环中所作的功不为负来定义材料的强化。这样做的目是注意到对耗散材料来说在软化过程中，例如拉伸曲线上过峰值点之后(这种情况 Drucker 称之为非稳定材料）与强化过程一样，原施加应力之功也是非负的，这样就无法用该功来区分材料的强化与弱化。但若采用完全不同于原施加应力 σ_{ij}^0 的附加应力的办法却可以揭示出材料的强化性质。具体地说材料的强化定义是由下述 Drucker 强化公设来给出的[22]。

Drucker 强化公设 强化意味着除在所有附加应力作用下材料仍保持平衡状态外，还要求：

（1）在该附加应力施加的过程中它所作的功 A 为正

（2）在该附加应力施加和移去的整个循环中，它所做的净功 A_ϕ 或者为正或者为零。

若让 σ_{ij}^t 与 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 分别表示该过程中任一瞬时单元体的应力与应变率，ε_{ij}^0 与 $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{I}}$ 分别表示初始应变状态与加载完毕后的应变状态，则（ $\sigma_{ij}^t-\sigma_{ij}^0$ ）表示的是附加应力。于是强化条件(1)的数学表达式可写为

$$A=\int_{\varepsilon_{ij}^0}^{\varepsilon_{ij}^{\mathrm{I}}}(\sigma_{ij}^t-\sigma_{ij}^0)d\varepsilon_{ij}>0 \qquad \text{（对加载过程）} \qquad (2\cdot17)$$

为了得到对应于条件(2)的数学表达式，设加载开始的时刻为 t_1，加载完的时刻为 t_2，卸载完的时刻为 t_3，则在整个应力循环中的净功 A_ϕ 为

$$\begin{aligned}A_\phi &= \int_{t_1}^{t_2}(\sigma_{ij}^t-\sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}dt+\int_{t_2}^{t_3}(\sigma_{ij}^t-\sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}dt\\ &=\left(\int_{t_1}^{t_2}(\sigma_{ij}^t-\sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^e dt+\int_{t_2}^{t_3}(\sigma_{ij}^t-\sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^e dt\right)\\ &\quad+\int_{t_1}^{t_2}(\sigma_{ij}^t-\sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^p dt+\int_{t_2}^{t_3}(\sigma_{ij}^t-\sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^p dt\end{aligned} \qquad (2\cdot18)$$

上式推导中采用了总应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 等于弹性应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ 与塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 之和的表达式。由于在整个应力循环中弹性功是可逆的，而上式中括号内的项表达的是一个循环中弹性功的总和，故应为零，又由于在卸载时无塑性应变增量（ $\dot{\varepsilon}_{ij}^p=0$ ）上式中的第四项应为零，于是强化条件(2)的数学表达式可以写为

$$A_\phi=\int_{t_1}^{t_2}(\sigma_{ij}^t-\sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^p dt\geqslant 0 \qquad \text{（对一循环过程）} \qquad (2\cdot19)$$

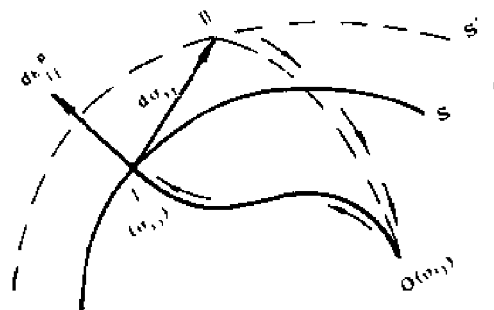


图10·6 从屈服面内出发的加载路径

为了得到式(2·19)的简洁表达式，试考虑从屈服面内某点 σ_{ij}^0 开始的附加应力作用过程。加

载时先从0点出发沿屈服面内的一条路径到达屈服面上的I点（图10·6），其应力状态为σ_{ij}。根据基本假设，在此过程中只产生弹性应变且其值与路径无关。接着假设作用一指向屈服面外的非常小的应力增量$d\sigma_{ij}$，则它将造成非常小的塑性应变$d\varepsilon_{ij}^p$以及弹性应变$d\varepsilon_{ij}^e$。然后再沿后继屈服面内的一条路径回到原来的应力状态σ_{ij}^0。记从0点加载到点I的时刻为t_s，加载起始与终了时刻为t_1与t_2，则式(2·19)可改写成

$$A_\phi = \int_{t_1}^{t_s} (\sigma_{ij}^t - \sigma_{ij}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \, dt + \int_{t_s}^{t_2} (\sigma_{ij}^t - \sigma_{ij}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \, dt \geqslant 0 \qquad (2\cdot20)$$

注意到从t_1至t_s的路径是在屈服面内进行的，它不产生塑性变形故第一项为零，于是我们得到

$$A_\phi = \int_{t_s}^{t_2} (\sigma_{ij}^t - \sigma_{ij}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \, dt \geqslant 0 \qquad (2\cdot21)$$

至此为止由式(2·17)与(2·21)表达的功A及A_ϕ都是精确的。注意到Drucker强化公设的核心是这些功大于零或等于零（后者只在$\varepsilon_{ij}^p = 0$时成立），这种不等式的判断放松了对A及A_ϕ精确计算的要求。若$t_2 - t_s = \delta t$为微量，则将A_ϕ展成Tayler级数，并甩去δt^3以上的项可得

$$A_\phi(t_2) = A_\phi(t_s) + \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial t}\right)_{t_s} \delta t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial t^2}\right)_{t_s} \delta t^2 \qquad (2\cdot22)$$

由
$$A_\phi = \int_{t_s}^{t} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \, dt$$

可得：
$$A_\phi(t_s) = 0$$
$$\left(\frac{\partial A_\phi}{\partial t}\right)_{t_s} = \left[(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right]_{t_s}$$
$$\left(\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial t^2}\right)_{t_s} = \left[\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p\right]_{t_s}$$

由此有
$$A_\phi = \left[(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right]_{t_s} \delta t + \frac{1}{2}\left[\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p\right]_{t_s} \delta t^2$$

由于σ_{ij}取任何值时$\frac{1}{2}\left[(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p\right]_{t_s}\delta t^2$总远小于$\left[(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right]_{t_s}\delta t$，故相比之下前者可略去，于是由上式及(2.21)式得

$$A_\phi = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^p \delta t + \frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p (\delta t)^2 \geqslant 0$$

或*
$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\, d\varepsilon_{ij}^p + \frac{1}{2} d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p \geqslant 0 \qquad (2\cdot23)$$

作为上式的特例，若附加应力的起始点选在屈服面上，则由$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$可得强化条件(2)的

* 式(2·23)的结果与Drucker在[23]中的结果不同，后者的第二项没有系数1/2。

表达式为

$$d\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}^{p}\geqslant 0 \tag{2·24}$$

注意到 $d\sigma_{ij}$ 为无穷小量，而当 $\sigma_{ij}\neq\sigma_{ij}^{0}$ 时 $(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{0})$ 为有限量，我们有

$$|\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{0}|\gg|d\sigma_{ij}| \tag{2·25}$$

故式(2·23)左边的最后一项可略去，由此即可得出下述关系式

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{0})d\varepsilon_{ij}^{p}\geqslant 0 \tag{2·26}$$

上式有时被称为最大局部作用原理，它在证明屈服面的外凸性和塑性理论的一些基本原理和规律上起着重要的作用。若附加应力的起始点仍选在屈服面上，并甩去高阶无穷小量，则表达强化条件(1)的式(2·17)可近似表示为

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}>0 \tag{2·27}$$

式(2·24)与(2·27)就是 Drucker 当初给出的应变强化的数学表达式。下面将看到式(2·24)在证明塑性流动的垂直性法则上的重要作用，而特别值得强调的是式(2·24)中的等号仅出现在 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ 为零的情况，以便与下面将要讨论的理想塑性材料的数学定义式区别开来。

Ⅲ. 垂直性法则与外凸性

现在设材料单元的应力状态可用应力空间中的矢量 **σ** 表示。这里应力空间指的是以应力作为座标轴长度测度而建立起来的空间，轴的基矢间是符合正交性条件的。在应力张量不对称的情况下，它的维数为9，在此空间中的曲面被称之为超曲面。若应力张量对称或某些应力分量为零则可得到六维的应力空间或蜕化的低维子空间。在所有以上的这些应力空间中若将塑性应变张量 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ 乘以一个具有应力量纲的常数，则 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ 亦可在同一空间中用矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ 表示，这样就可使我们用直观的方法来建立某些基本的关系。例如对(图10·5)所示的加载过程，可画出该超空间中的矢量图如(图10·7)所示。忆及矢量点积的特性则式(2·24)可表示为

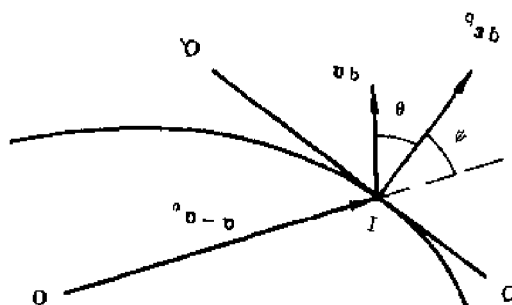


图10·7　九维应力空间中的应力及塑性应变矢量

$$d\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=|d\sigma_{ij}||d\varepsilon_{ij}^{p}|\cos\theta\geqslant 0 \tag{2·28}$$

或

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{2·29}$$

根据基本假设产生塑性应变的 $d\boldsymbol{\sigma}$ 必然是指向屈服面外的，因而 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的变化范围是在I点屈服面切平面 QIQ' 以外的区域内，若在矢量 $d\boldsymbol{\sigma}$ 与 $d\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ 组成的平面内来考虑问题，则 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的极限位置应为线段 IQ 与 IQ'，其间的变化角度则为 π。要在此范围内象式(2·29)要

求的那样 $d\sigma$ 与矢量 $d\varepsilon^p$ 的夹角小于或等于 $\pi/2$，唯一的可能性是矢量 $d\varepsilon^p$ 均分角QIQ'，这意味着它应垂直于切平面 QIQ' 并指向屈服面以外，这证明了塑性应变增量的所谓垂直性法则，即塑性应变增量的方向与 $d\sigma$ 无关，始终垂直于加载点处的屈服面，并与该点外法线的方向相重合。

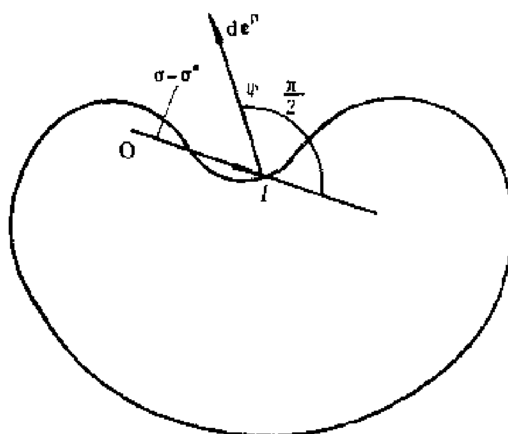
在满足垂直性法则的前提下，屈服面仍存在外凸与外凹两种可能性，下面我们用式(2·26)证明屈面必然是外凸的，事实上由式(2·26)可以断定

$$(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0)\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p=\left|\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^0\right|\left|d\varepsilon_{ij}^p\right|\cos\psi\geqslant 0 \qquad (2\text{·}30)$$

或

$$-\pi/2\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2} \qquad (2\text{·}31)$$

上式意味着从屈服面内任一点至加载点 I 的射线都必须与 $d\varepsilon^p$ 或外法线成锐角，显然这只有屈服面外凸时才能满足。事实上若曲面外凹，则总可以找到一点，它引至点 I 的射线与外法线成钝角（图10·8），因而违背了式(2·31)，又由于加载点 I 的任意性，故屈服面处处外凸，这样就完成了外凸性和垂直性在光滑的屈服面上各点都成立的证明。



10·8 曲线外凹时 ψ 可大于 $\pi/2$

以上的讨论是针对屈服面处处光滑的条件下进行的，这里光滑的含义是指曲面具有连续转动的切平面。若屈服面出现棱边或锥顶（图10·9(a)(b)）。则根据式(2·26)容易判断，$d\varepsilon_{ij}^p$ 必位于棱边两侧加载面法线所形成的角度之内，对于锥形顶点的情况，$d\varepsilon_{ij}^p$ 则必须位于由尖点附近屈服面的法线旋转而成的锥体内。

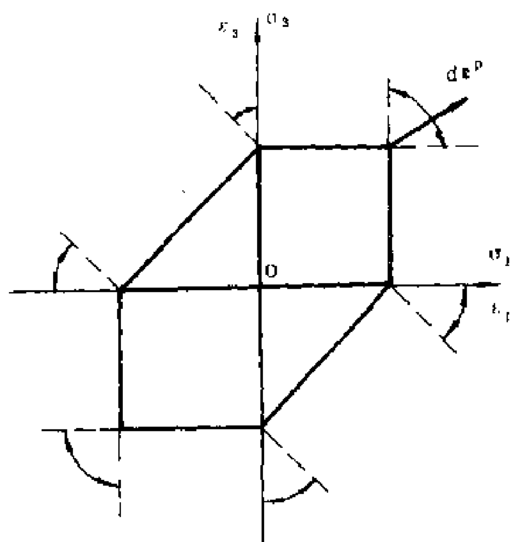


图10·9(a) Tresca 屈服面情形下的 $d\varepsilon^p$ 方向的变化范围

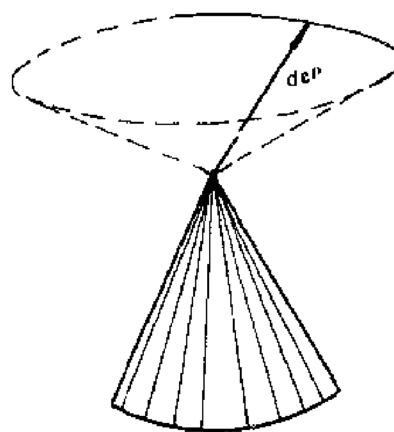


图10·9(b) 锥顶处 $d\varepsilon^p$ 的变化范围

对于理想塑性材料，我们可类比 Drucker 强化公设，把它定义为符合下式的材料

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p=0 \qquad (2\text{·}32)$$

显然它是符合单向拉伸下理想塑性的定义的，不过在那里产生塑性流动时应力不变化（$d\sigma=0$），而在这里应力分量在保证应力状态点仍留在屈服面上的条件下可改变各分量的大小。注意到矢量 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的变化是处在加载点处屈服面的切平面上，故满足式(2·32)的充要条件是 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ 垂直于屈服面。同样亦可构造出（$\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{0}$）$\geqslant d\sigma_{ij}$ 的不等式，并由此及式(2·32)得到式(2·26)，并由此证明理想塑性材料屈服曲面的外凸性。

Ⅳ．流动规则

由高等数学可知，在上述九维应力空间及其蜕化后的低维应力空间中，屈服面 $f=0$ 的外法线方向余弦与 $\partial f/\partial\sigma_{ij}$ 成正比。故塑性应变率分量 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ 与 $\partial f/\partial\sigma_{ij}$ 成正比例，即有

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}=\Lambda\partial f/\partial\sigma_{ij}, \tag{2·33}$$

式中Λ 是一标量因子，可以是应力、塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_{p}$ 和材料强化历史（或加载史）的函数。式(2.33)表明，塑性应变率是屈服函数对应力分量求偏导数而得到的。这种 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ 的数学表达形式正是塑性势理论所追求的，不过这里的塑性势不再是类比弹性位势得到的，而是根据 Drucker 公设推出的结果，它证明了对一大类材料塑性势就是规定屈服面的屈服函数。但对岩土材料，其塑性势可与屈服函数不相等，相应于那种材料的塑性流动被称之为非关联流动，这里讨论的则是关联流动的情形。

对于理想塑性材料或强化材料的初始屈服面，f 仅是应力的函数。若取 f 为式（2·2a）表达的Mises 屈服函数，将其代入式(2·33)，并记 $T_{(2)}=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$,因 $\frac{\partial T_{(2)}}{\partial\sigma_{ij}}=S_{ij}$ 则可求得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}=\Lambda S_{ij}\quad,\quad d\varepsilon_{ij}^{p}=d\lambda\ S_{ij} \tag{2·34a,b}$$

$$\Lambda=\frac{d\lambda}{dt}$$

或
$$de_{ij}=\frac{1}{2G}dS_{ij}+d\lambda S_{ij} \tag{2·35a}$$

上式称为 Prandtl-Reuss 关系，它表明塑性应变分量的增量与相应的偏应力分量成比例。由于 $de_{ii}=0$ 故 de_{ij} 只有 5 个是独立的，因此要加上一个体积弹性的方程，即

$$d\varepsilon_{KK}=\frac{1-2\nu}{E}d\sigma_{KK}. \tag{2·35b}$$

如果塑性应变增量很大，则可略去弹性应变增量，于是可得到 Levy-Mises 关系如下

$$d\varepsilon_{ij}=d\lambda S_{ij}.$$

或
$$\frac{d\varepsilon_{x}}{S_{x}}=\frac{d\varepsilon_{y}}{S_{y}}=\frac{d\varepsilon_{z}}{S_{z}}=\frac{d\varepsilon_{xy}}{S_{xy}}=\frac{d\varepsilon_{yz}}{S_{yz}}=\frac{d\varepsilon_{zx}}{S_{zx}} \tag{2·36}$$

即化简为应变分量的增量与偏应力分量成比例。

对于强化材料若设式(2·6)中的强化参数 κ 可表示成塑性应变 ε_{ij}^{p} 的函数，则由式(2·6)在加载条件下，我们有

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^{p}_{ij}}\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^{p}_{ij}}\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}=0 \tag{2·37a}$$

将式(2·33)代入(2·37 a)，可得

$$\Lambda=g\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl} \tag{2·37b}$$

式中

$$g=\frac{-1}{\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^{p}_{mn}}+\frac{\partial f}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^{p}_{mn}}\right)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} \tag{2·37c}$$

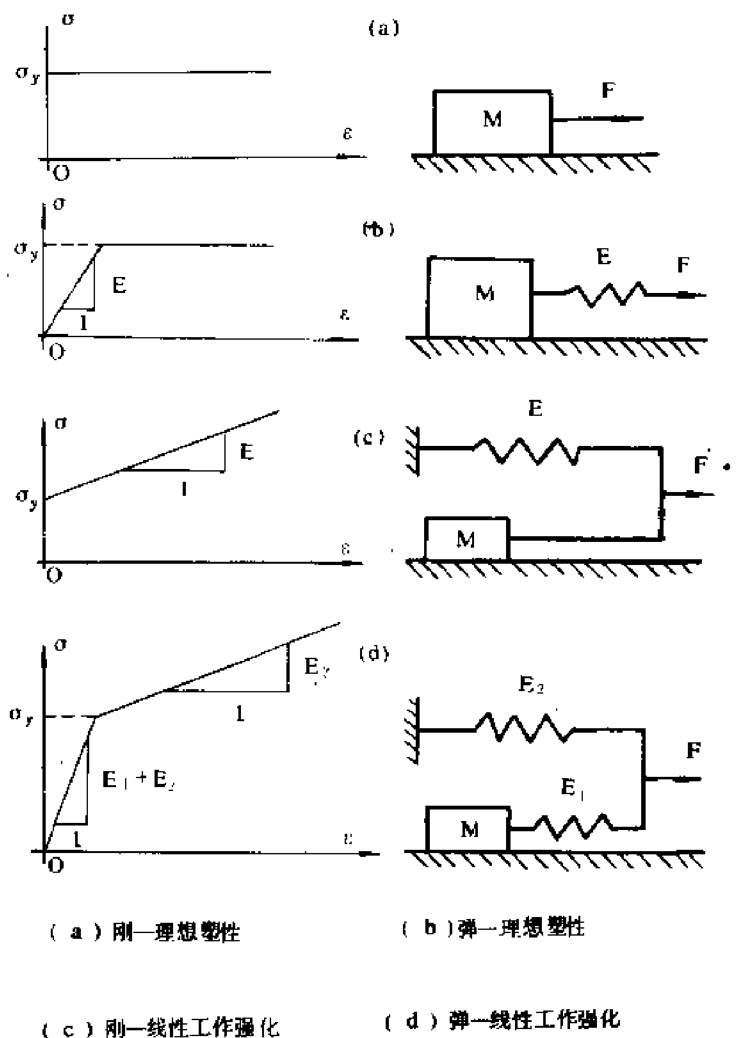
将式(2·37b)代入(2·33)后，可将塑性应变率$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$表示为

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}=g\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl} \tag{2·37d}$$

上式给出的塑性应变增量与应力增量之间的线性关系，是在假定κ可表示为ε^{p}_{mn}的现时值的函数的条件下推出的结果，这在一般情况下只能看成是一种假定〔注：强化参数应看成是应变史的泛函〕，并无坚实的理论基础。式(2·37 d)仅适用于加载，如果$\dot{\sigma}_{ij}$全部反号则给出的是完全不同的弹性卸载规律。

Ⅴ．简化模型及应用举例

由以上的分析可见，如果在一般条件下用形如式(2·37 c)与(2·37 d)的公式来处理弹塑性分析的问题，将是比较麻烦的，因此在工程中常采用一系列简化的模型。(图10·10)中分别给出了刚——理想塑性、弹——理想塑性、刚——线性工作强化和弹——线性工作强化的模型。这些模型虽然有一定的应用价值，但精度通常很低。下面我们以Mises型屈服各向同性应变强化的模型为例，来求出这种强化材料的流动法则。对Mises各向同性强化规律，由式(2·7 d)我们有



(a) 刚—理想塑性　　(b) 弹—理想塑性

(c) 刚—线性工作强化　　(d) 弹—线性工作强化

图10·10　各种简化模型

$$f = \tilde{\sigma} - \sigma_s - \kappa = 0 \tag{2·38a}$$

或

$$d\tilde{\sigma} = d\kappa \tag{2·38b}$$

若引入一新的微分参数，称之为等效应变微分$\widetilde{d\varepsilon^p}$，使之在单轴拉伸时之值恰等于拉伸塑性应变增量$d\varepsilon_p$（参见图10·11之横座标）。该参数之数学表达式为

$$\widetilde{d\varepsilon^p} = \sqrt{2/3}\sqrt{d\varepsilon_{ij}^p\, d\varepsilon_{ij}^p} \tag{2·39}$$

事实上根据塑性不可压的假设，在单轴拉伸时有

$$d\varepsilon_{22}^p = d\varepsilon_{33}^p = -\frac{1}{2}d\varepsilon_{11}^p \tag{2·40a}$$

将式(2·40a)代入(2·39)可得

$$\widetilde{d\varepsilon^p} = \sqrt{2/3}\cdot\sqrt{\left(d\varepsilon_{11}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{22}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{33}^p\right)^2} = d\varepsilon_{11}^p = d\varepsilon^p \tag{2·40b}$$

等效应变强化的假设意味着，在复杂应变路径下强化参数的增量$d\kappa$，与$d\varepsilon^p = \widetilde{d\varepsilon^p}$时拉伸应力曲线的强化参数增量$d\kappa_{拉}$相等，后者恰等于加载处之切线斜率$E_t^p$乘上$d\varepsilon^p$（图10·11），故有

$$d\kappa = d\kappa_{拉} = E_t^p\, d\varepsilon^p = E_t^p\, \widetilde{d\varepsilon^p} \tag{2·41a}$$

式中 $E_t^p = d\sigma/d\varepsilon^p$ （2·41b）

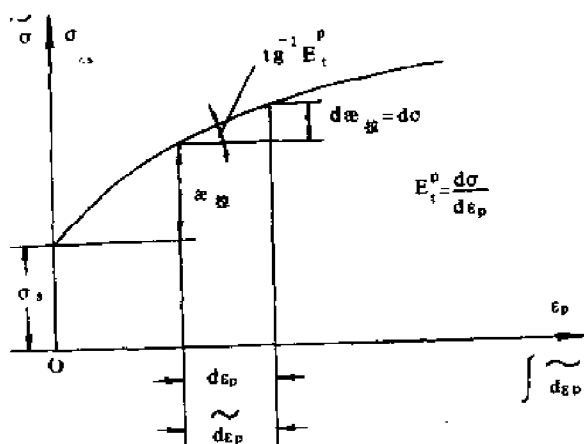


图10·11 等效应力及等效塑性应变的概念及强化参数的决定

将上式代入式(2·38b)得

$$d\tilde{\sigma} = E_t^p\, \widetilde{d\varepsilon^p} \tag{2·42}$$

值得注意的是上式中的$\widetilde{d\varepsilon^p}$并不是微分，而是由式(2.39)定义的。忆及$T_{(2)} = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$及$\frac{\partial T_{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij}$，将式(2·7b)代入式(2·33)，可得

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda\, S_{ij} \tag{2·43}$$

为了求得这一强化材料的$d\lambda$与加载史的关系，可将上式代入式(2·39)，并应用式(2·42)可得

$$d\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\widetilde{d\varepsilon^p}}{\sqrt{T_{(2)}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d\tilde{\sigma}}{\sqrt{T_{(2)}}E_t^p} \tag{2·44}$$

再忆及$\widetilde{\sigma}=\sqrt{3T_{(2)}}$，于是有

$$d\widetilde{\sigma}=\frac{\sqrt{3}}{2}T_{(2)}^{-1/2}dT_{(2)} \qquad (2\cdot45)$$

将上式代入式(2·44)得

$$d\lambda=\frac{3}{4}\cdot\frac{dT_{(2)}}{T_{(2)}E_t^p} \qquad (2\cdot46)$$

于是由式(2·43)可得

$$de_{ij}^p=\frac{3}{4}\cdot\frac{dT_{(2)}}{T_{(2)}E_t^p}S_{ij} \qquad (2\cdot47)$$

上式说明塑性流动规律与屈服函数及其变化（这里是$T_{(2)}$与$dT_{(2)}$）密切相关，对关联流动这是必然的结果。如果我们测得了拉伸曲线并将E_t^p与σ的关系转换成E_t^p与$T_{(2)}$的关系，就可根据加载情况（即$T_{(2)}$与S_{ij}）来决定复杂应力状态下的$d\lambda$和de_{ij}^p。下面我们举出一个具体的数字例题来加以说明。

应用举例　设有一无初应变的薄壁圆管，承受一组合的拉伸与扭转的载荷历史，它在$\sigma-\tau$空间中的路径如下（单位为Pa，见图10·12）

（Ⅰ）(0，0)至(0，10000)

（Ⅱ）(0，10000)至(30000，10000)

（Ⅲ）(30000，10000)至(30000，－10000)

（Ⅳ）(30000，－10000)至(0，0)

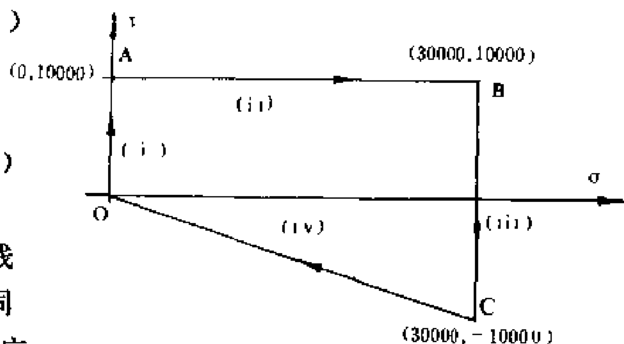


图10·12　在(σ,τ)空间中的加载路径

假设管子的材料是弹塑性材料。弹性响应是线性的，屈服准则是Mises准则，并采用各向同性应变强化。由简单拉伸实测的$\nu=0.3$，且应力应变关系为

$$10^6\varepsilon=\frac{\sigma}{10}+(\sigma/1000)^3$$

其中第一项表示弹性应变，第二项表示塑性应变。现规定塑性应变为0.1%时对应的应力为屈服极限，则显然A点即为初始屈服点，它对应的屈服面（线），即为初始屈服面（线）。我们的任务是对该薄壁园管进行弹塑性应变分析，即找出弹塑性应变发展的规律，为此我们需先将本构关系用σ，τ，$d\sigma$和$d\tau$表成显式。在本例题中由于只有σ与τ不为零，故

$$T_{(2)}=\frac{1}{6}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)]$$

$$=\frac{1}{3}(\sigma^2+3\tau^2) \qquad (a)$$

$$dT_{(2)}=\frac{2}{3}\sigma d\sigma+2\tau d\tau \qquad (b)$$

下面由单向拉伸实验曲线去求E_t^p，并注意在此单轴条件下得到的结果应表示成应力状态下

一般适用的形式，此时应将 E_t 中的 σ 按下式变换为 $T_{(2)}$（在式（a）中令 τ 为 0 求得的）

$$T_{(2)} = \frac{1}{3}\sigma^2 \qquad (c)$$

由题中给出的实验结果可知

$$10^6\varepsilon^p = (\sigma/10^3)^3 \qquad (d)$$

则
$$E_t^p = d\sigma/d\varepsilon^p = \frac{10^{15}}{3\sigma^2}$$

将式（c）给出的相应条件下的 σ 与 $T_{(2)}$ 的关系代入上式，可得

$$E_t^p = \frac{10^{15}}{9T_{(2)}} \qquad (e)$$

将式（e）（b）代入式（2·46）可得

$$d\lambda = \frac{27}{4}\times 10^{-15}dT_{(2)} = \frac{27}{4}\times 10^{-15}\left(\frac{2}{3}\sigma d\sigma + 2\tau d\tau\right) \qquad (f)$$

再应用式（2·47）可得

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{27}{4}\times 10^{-15}\left(\frac{2}{3}\sigma d\sigma + 2\tau d\tau\right)S_{ij} \qquad (g)$$

忆及 S_{ij} 的定义式，则各塑性应变分量的表达式可给出如下：

$$\left.\begin{aligned}
d\varepsilon_x^p &= 3\times 10^{-15}(\sigma^2 d\sigma + 3\sigma\tau d\tau)\\
d\varepsilon_r^p &= d\varepsilon_\theta^p = -\frac{3}{2}\times 10^{-15}(\sigma^2 d\sigma + 3\sigma\tau d\tau)\\
d\varepsilon_{x\theta}^p &= \frac{9}{2}\times 10^{-15}(\sigma\tau d\sigma + 3\tau^2 d\tau)\\
d\varepsilon_{xr} &= d\varepsilon_{r\theta} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

对弹性应变，我们有下述公式

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E}d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}d\sigma_{22}\delta_{ij} \qquad (i)$$

由实验曲线可知 $E = 10^7 p_a$，且 $\nu = 0.3$，则可得其表达式为

$$d\varepsilon_{ij}^e = 1.3\times 10^{-7}d\sigma_{ij} - 3\times 10^{-8}d\sigma_{22}\delta_{ij} \qquad (j)$$

应用上述各式求塑性应变分量时，关键在于找出后继屈服面，以便判断在那些加载路径上有塑性变形产生，然后再针对这些段用式（h）求出其计算结果。

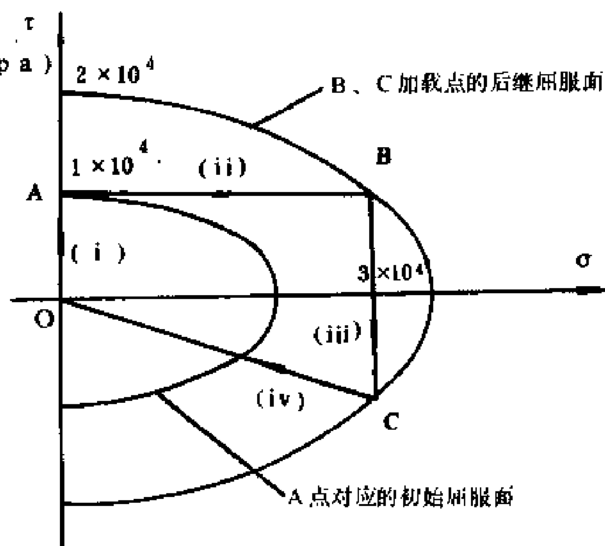


图10·13　加载路径与后继屈服面(线)

（图10·13）中列出了各加载点对应之屈服面（线）及加载路径，值得注意的是由于 B、C 点的屈服面（线）一样，因而整个加载过程中只有路径（ii）中有塑性变形产生，在加载点 B

处之各分量可按式(h)求得为：

$$\varepsilon^p_{xB}=3\times10^{-15}\int_0^{30000}\sigma^2 d\sigma=2.7\times10^{-2}$$

$$\varepsilon^p_{rB}=\varepsilon^p_{\theta B}=-1.35\times10^{-2}$$

$$\varepsilon^p_{x\theta}=\frac{9}{2}\times10^{-15}\int_0^{30000}(10)^4\sigma d\sigma=2.025\times10^{-2}$$

$$\varepsilon^p_{xr\theta}=\varepsilon^p_{r\theta B}=0$$

以上得到的结果也是卸载完毕后的残余应变，这是因为由基本概念判断或用式(j)的计算都可确证，经过路径(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)和(Ⅳ)而回复至原点 0 后的总弹性应变是为零的。本例题在 A、B 加载点处塑性应变增量垂直性法则的检验也是有意义的，请读者自己加以完成。

Ⅵ．评论和补注

在结束经典塑性理论的讨论时，我们有必要对§10·1中关于经典模型的评论作一简单回顾。经典塑性理论有时亦称为数学塑性理论，在 Drucker 公设提出以后该理论建立了统一的网络，数学上是比较严密的。问题则出在该理论的基本假设是否或在多大的精度范围内成立上。用在屈服面的实验研究方面作过大量工作的 A.phillips 的话来说[28]，“该基本假设的实验验证是困难的，这是因为图 1 与图 2 是理想化了的，而实验处理的材料是现实的而不是理想化了的”（注：该文指的图 1 是理想化后的拉伸曲线，它去掉了卸载点与重新加载点并不重合等现实材料的特性，而图 2 则是根据该理想拉伸曲线引伸出来的初始屈服面及后继屈服面，参阅图10·3与10·4）。除了基本假设实验验证的问题以外，强化假设的粗糙性，屈服点定义的人为性，本构规律在应力空间不连续而带来的计算复杂性都使该理论的应用受到了较大的限制。对工程上极关重要的弹塑性分析，即塑性应变与弹性应变在同一量级的应变分析，该理论表现了较大的困难（当 $\sigma_{0.2}$ 被定义或屈服点并以此作为弹性分析的界限时，实际上就掩盖了高达$2000\mu\varepsilon$ 的塑性变形范围内特定材料塑性响应的具体特性，而当利用小塑性应变来定义屈服限时又遇到了由于第二级效应造成的困难[29]）。而对于有限变形下该理论的分析，其理论基础也是值得探讨的，这一情况可以用 E.H.Lee 在 1975年金属非弹性本构方程专题讨论会上的下面一段话来加以说明[30]，他说：“假如人们要去研究有限变形下的弹塑性理论，那就必须面对这一问题，即塑性理论并未进入已对有限变形发展了的连续介质力学的网络之中。如果人们注意 Noll 与 Truesdell 的书*，他们简单地认为塑性理论并没有很好地建立起来，认为它不满足旋转下不变性的要求，因此在该学派的一系列书和论文中，对该理论不予讨论，简直无视了它的存在”。这种情况促使了人们近年来对有限变形下弹塑性理论基础研究的热潮。

下面我们转入对经典塑性理论公设的讨论。为此我们先简略介绍一下 Ильюшин塑性公设（1961），它是在应变空间中来讨论问题的，其作用相当于在应力空间中建立塑性模型的 Drucker 强化公设一样，对建立应变空间中的经典理论起着核心的作用。

Ильюшин 塑性公设　从任一点（σ^0_{ij}，ε^0_{ij}）开始与终止的一个应变循环中，其总应变比能不为负，即下述周线封闭积分必须大于或等于零

$$W=\oint\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}\geqslant 0 \qquad (2\cdot48)$$

若用下式定义σ^{p}_{ij}，使之与ε^{p}_{kl}用弹性张量C_{ijkl}联系起来，则有

$$\sigma^{p}_{ij}=C_{ijkl}\,e^{p}_{kl} \qquad (2\cdot49)$$

基本上仿照推导式(2·23)(2·24)与(2·25)的方法，可分别求得

$$(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^{0}_{ij})\,d\sigma^{p}_{ij}+\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}\,d\sigma^{p}_{ij}\geqslant 0 \qquad (2\cdot50)$$

$$d\varepsilon_{ij}\,d\sigma^{p}_{ij}\geqslant 0 \qquad (2\cdot51)$$

$$\left(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^{0}_{ij}\right)d\sigma^{p}_{ij}\geqslant 0 \qquad (2\cdot52)$$

式中ε_{ij}为屈服面上的点，即满足下述屈服面的方程

$$F(\varepsilon_{ij},\kappa)=0 \qquad (2\cdot53)$$

值得注意的是上式表示的屈服面就是应变空间中的屈服面，象拉伸加载时塑性应变不断加大一样，该空间的屈服面随加载或塑性变形的发展是不断向外扩展的，这里加载条件对应于式(2·51)中左端>0的情况，$=0$则表示中性变载或卸载。利用式(2·52)与(2·51)亦可分别证明应变空间中屈服面的外凸性及垂直性法则，后者可表示为

$$d\sigma^{p}_{ij}=d\mu\,\partial F/\partial\varepsilon_{ij} \qquad (2\cdot54)$$

且有

$$d\Lambda=d\mu \qquad (2\cdot55)$$

Ильюшин 塑性公设与 Drucker 强化公设是两个独立的公设，后者只适用于强化（稳定）材料，而前者可适用于弱化（或非稳定）材料，即可描述相当于拉伸曲线峰值点以后的材料特性。不难证明 Drucker 公设只是 Ильюшин 公设的充分条件而不是必要条件，即满足Drucker 公设的一定满足 Ильюшин 公设，但后者不一定要求应力循环中的塑性功$A_p>0$，因而不满足 Drucker 公设的却可能满足 Ильюшин 公设，这说明 Ильюшин 塑性公设的适用范围比 Drucker 强化公设的范围广。

上面关于经典塑性理论基本公设适用范围的讨论，提出了一个很基本的问题，即既然 Drucker 公设不是塑性变形中普遍成立的公设，那么和 Drucker 公设处于同一概念范畴的 Ильюшин 公设是否也不能构成一般条件下的塑性变形的充分和必要条件呢？只要注意到这两个公设是在等温条件下以机械能守恒及其损耗的观念出发的，就可得出明确的回答。实际上这两个公设都只是拟热力学的公设，而不是从热力学第二定律得出的结果，换句话说它们并没有不可逆热力学的根基。从后者的观点来看，产生不可逆变形（包括塑性变性）的充分与必要条件就是满足在八章中介绍的 Clasius-Duhem 不等式，它概括了一切复杂的塑性变形过程，因此也是研究塑性变形规律的基础。顺便指出式(2·23)—(2·25)给出的Drucker 公设的数学表达式，或式(2·50)—(2·52)的 Ильюшин 公设的表达式，由于用的是小变形中的

* C. Truesdell & W. Noll, The Nonlinear Theories of Mechanics, Handbuch der physik, Band III/3, Ed. S. Flügge, Springer-Verlag, Berlin 1965.

应力与应变张量，因而仅适用于小变形的情况。在有限变形下公设的数学表达式，则还必须联系到有限变形下的应力应变的定义式来加以考虑，并由于不能简单地把总应变分解为弹性应变与塑性应变，因而所包含的问题的解答还并非十分清晰的。

回顾上面关于经典塑性理论的讨论，我们既看到了由于它采用简明的公设与基本假设而带来数学上的严密性和在某些工程问题中的适用性，也看到了它的一些严重的不足之处。当我们面临着发展更现实更方便的塑性模型的迫切任务时，我们有必要从不可逆热力学出发，去发展一种不以屈服面的概念作为其理论前提和基本假设的塑性理论，这就是本章其余几节介绍内时塑性理论的目的。

§10·3 从一维塑性模型看两种理论的联系与区别

在本节中我们首先从经典塑性理论与内时理论的基本观点出发，对Drucker在其奠基性论文〔22〕中用过的一维模型（图10·14）的塑性响应特性进行分析比较，以便用简洁的方式阐述内时理论的某些最基本的概念，并说明经典模型可作为内时模型的一种理想化情况而得到。

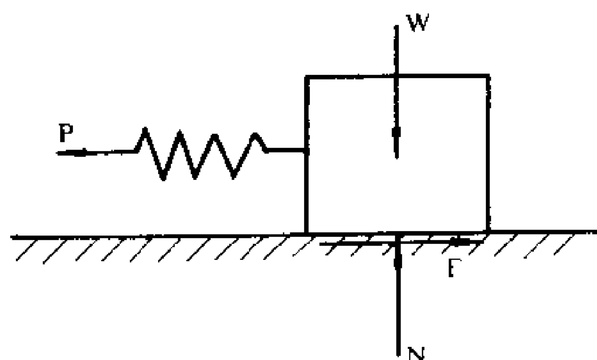


图10.14 塑性流动的简化模型

为了研究（图10·14）所示的模型的塑性响应特性，我们提出两种数学模式来进行描述，它们将分别称之为$M.M.1$和$M.M.2$，我们首先说明它们在理想的情况下是等价的。

Ⅰ. 理想的情况

为了简化起见，先假设摩擦系数是常数，设F_y是临界摩擦力；U^p——滑块的位移，U^e——弹簧的伸长；U——总的位移，于是

$$U^p = U - U^e$$

我们按照下述方式来构造描述这种理想化了的滑块运动的两种数学模式。

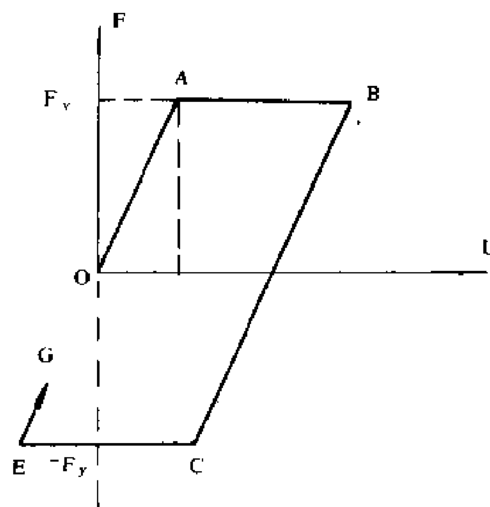


图10·15 简单模型的力学响应

M.M.1

（1）假定$|F| < |F_y|$，则$\dot{U}^p = 0$，如(图10·15)中的线段OA，BC和EG所示。

（2）如果$|F| = |F_y|$ 且$\dot{F} = 0$，则$\dot{U}^p \neq 0$，如线段AB和CE所示。

（3）如果$|F| = F_y$ 且$|F|^{\bullet} < 0$，则$\dot{U}^p = 0$，如点B和E所示，式中之"•"表对时间的导数，例如

$$|F|^{\bullet} = \frac{d|F|}{dt}$$

M.M.2

在这一数学模式中引入一个单调递增的参数 ζ，且让 $d\zeta$ 表示滑块位移增量的绝对值，即

$$d\zeta = |dU^p| \tag{3·1}$$

这样 ζ 的意义是累计滑块位移值，而该力学模型的响应特性是由下式加以描述的

$$F = F_y dU^p/d\zeta \qquad |F| \leqslant F_y \tag{3·2}$$

在（图10·15）的 OA 和 BC 段中，$dU^p/d\zeta$ 是不定的，且力 F 在 $\pm F_y$ 之内变化，其具体数值由弹簧响应而决定。

显然对所述的理想情况，这两个模型是等价的，因为他们给出了同样的力的响应。其区别暂时限于前者采用了力作为独立变量，后者则以位移作为独立变量。但是这并不构成经典模型与内时模型的根本区别，因为尽管经典模型中以 Drucker 假设为基本假设的模型，是以应力 $\sigma(t)$ 作为作用函数，而应变 $\varepsilon(t)$ 作为响应函数的。但如上节所述也有以 Ильюшин 公设为基本假设的系统，后者是以二次世界大战后刚性试验机的发展为背景的，在这种试验机中应变作为独立的控制变量而试件经历的应力则是被测定的量。在内时理论中这两种方式也都被加以采用，即以 Helmholtz 自由能为基础的以应变作为独立变量的基本系统和以 Gibbs 自由能为基础的以应力作为独立变量的系统，但是迄今为止第一种系统是主要的，我们在这里讨论的 $M.M.2$ 就是这种方式。

Ⅱ．第二种数学模式的一般化

现在我们将 $M.M.2$ 推广，以便使式(3·2)只是更广泛和更现实的数学模式的一种特殊情况，注意到(3·2)式可以写成

$$F = F_y \int_0^{\zeta} \delta(\zeta - \zeta') \frac{dU^p}{d\zeta'} d\zeta' \tag{3·3}$$

式中 $\delta(\zeta)$ 是脉冲函数，记住

$$\delta(\zeta) = \lim_{\beta \to 0_+} \beta \zeta^{\beta - 1} \tag{3·4}$$

将式(3·4)代入(3·3)我们得到

$$F = \lim_{\alpha \to 1_-} \int_0^{\zeta} \frac{K}{(\zeta - \zeta')^{\alpha}} \frac{dU^p}{d\zeta'} d\zeta' \tag{3·5}$$

式中 $\alpha = 1 - \beta$；$K = F_y(1 - \alpha)$；下标“+”和“-”分别表示右极限和左极限。分析式(3·5)的数学结构我们看出其核心函数 K/ζ^{α} 是在原点具有弱奇异性的函数，且当 $\alpha < 1$ 时是可积的。（注：对于一确定的过程 $dU^p/d\zeta$ 有一确定值，例如简单拉伸时，$dU^p/d\zeta = 1$），因而从数学上看下述更一般的数学形式是允许的，即

$$F = \int_0^{\zeta} \frac{K}{(\zeta - \zeta')^{\alpha}} \frac{dU^p}{d\zeta'} d\zeta' \qquad \alpha < 1 \tag{3·6}$$

至于这种推广了的数学模式是否能表达更广泛的物理模型，或者说在什么条件下才具有实际意义，则必须联系到实际材料所表现出来的塑性变形特性加以研究。如果将这种数学模式用于轴向应力和塑性应变作为物理变量的情况，则式(3·6)对应于

$$\sigma = \int_0^{\zeta} \frac{\sigma_y(1 - \alpha)}{(\zeta - \zeta')^{\alpha}} \frac{d\varepsilon^p}{d\zeta'} d\zeta' \qquad \alpha < 1 \tag{3·7}$$

式中 ε^P 是塑性应变且 $d\zeta = |d\varepsilon^P|$，而$\zeta$表示着杆件塑性应变增量的累积，即$\zeta=\int_0^{\varepsilon^P}|d\varepsilon^P|$。对简单拉伸情况，我们容易得到下面形式的解析解

$$\sigma = \sigma_y(\varepsilon^P)^{1-\alpha} \qquad \alpha<1 \tag{3·8}$$

我们现在根据在杆件拉伸试验中得到的σ-ε^P 曲线的特性对 $\alpha<1$ 的下述情况进行讨论

（1）$\alpha\leqslant 0$ 将式(3·8)中的σ 对 ε^P 求二阶导数，则可以立即判断，$\alpha<0$ 时由式(3·8)给出的σ-ε^P 曲线是上凹的，而 $\alpha=0$ 则对应于过原点的一根直线，这种情况与实际不吻合，故不予考虑。

（2）$0<\alpha<1$：这时式(3·8)表示的正是著名的Osgood-Ramberg关系。这一关系是根据不同材料的大量试验数据总结出来的，它比较精确地反映了很大一类材料在开始出现塑性变形后的响应特性，即加载一开始就出现极微小的塑性变形，应力随塑性变形增加急剧增长（这从位错的观点来看也是合理的），因而是一种较现实的本构关系。α 在这一范围内变动的一个特例是 $\alpha\to1_-$的这一情况，这时式(3·8)变为

$$\sigma = \sigma_y \qquad (\alpha\to1_-) \tag{3·9}$$

即得到了经典模型中的理想塑性这一简化情况。式(3·9)表征着塑性响应是通过屈服点(或屈服面)来加以规定的。由此可见数学塑性理论中的本构描述，从数学上看只是更广泛的如式(3·7)表达的数学模式的一个特例，从物理上看它是一种理想化的和简化的模型。这里要特别指出的是式(3·7)表达的本构方程正是以后将要得到的具有弱奇异性的内时塑性本构方程的一种基本形式。因而这里的讨论蕴含着经典模型是内时模型的一种简化和特殊情况的观点。关于包含流动规则和后继屈服面的两种模型的更广泛和更严格的分析比较，将在建立了含有屈服面的三维内时本构方程后进行。

Ⅲ．强化过程

对于(图10·14)的模型来说，强化(或软化)可以看成是滑块运动过程中摩擦力的增加(或减小)而表现出来的。对于实际材料则反映着材料内部广义摩擦力之增加，它们将与反映应变史影响的累计塑性变形 ζ 有密切关系。回到模型的情况则有

$$F_y = F_y^0 f(\zeta) \tag{3·10}$$

如果只限于讨论强化，则 $f(\zeta)$是 ζ 的单调递增函数。于是可将方程(3·2)写成下述形式

$$F = F_y^0 \frac{dU^P}{dZ} \tag{3·11}$$

式中

$$dZ = \frac{d\zeta}{f(\zeta)} \tag{3·12}$$

Z 被称之为内蕴时间标度。仿照前面的办法我们也可得到与方程(3·7)相类似的表达式

$$\sigma = \int_0^Z \frac{E_0}{(Z-Z')^\alpha}\frac{d\varepsilon^P}{dZ'}dZ' \qquad 0<\alpha<1 \tag{3·13}$$

其中 $E_0=\sigma_y(1-\alpha)$。值得注意的是 E_0 并不表示弹性模量，但是从较广的物理意义上来看，它可被称为是"塑性刚度"，即 E_0 越大，材料对塑性变形的抗力越大。

从上面关于一维本构模型的讨论，我们可以作出如下概括。首先不同于经典模型的内时模型也可用来描述材料塑性变形特性；不仅如此它还是能描述如同 Osgood-Ramberg那种实

际关系的更现实的模型，以致一维经典模型只是这种模型在$\alpha \to 1_$时的特殊和理想化的情况。第二，在遗传积分(3·13)中的核心函数，在原点具有弱奇异性，当用E_0/Z^{α}表示时，可积性与$\sigma - \varepsilon^P$曲线的上凸性共同要求：$0 < \alpha < 1$。第三，内蕴时间标度Z在本构方程(3·13)中起着一个核心的作用，关于它的深刻的意义我们将在下一节中详细讨论。

§10·4　耗散型材料本构方程的形式不变性定律

内蕴时间理论的最基本概念是本构的材料不变性概念，这一名词正式出现在1981年Valanis的论文“Rivlin对内时理论批评的实质”中〔31〕，在那里他首次“对本构理论的领域引入了本构的材料不变性概念(The Concept of Constitv(ive material invariance)”，然而导致建立内时理论的这一基本概念，实际上早已隐含在他最早关于内时理论的论文中〔32〕。根据这一概念，代替对每一种材料去寻求其非线性本构方程的十分繁冗的研究方法，而寻求适合于不同种类材料的内蕴时间的定义以反映所研究的材料的特性，在此前提下去保持一大类材料非线性本构方程形式上的不变性，这就是为什么Valanis从一开始就强调内时概念是该理论的中心概念的原因。这种思想也充分地表述在文献〔24〕下述一段话中：“这里我们注意到一个非常重要的原理，即材料本构不变性原理，具体地说，两种力学系统，滑块和阻尼器具有同样的本构方程形式。其差别在于特定的‘材料时间’的定义上。换句话说，代替一个普遍的时间t，每一种材料要求某种内蕴的时间ζ以描述它的特性。在阻尼器的情况$d\zeta = dt$，而在滑块的情况$d\zeta = |du|$”。尽管上述不变性“概念”或“原理”十分重要，但是它们并没有经过严格的论证使之在坚实的基础上建立起来，核心问题是在什么条件下，不同的耗散型材料的本构方程有可能归化为相同的形式，与此紧密相关的问题是，什么是定义内蕴时间的准则。当承认内蕴时间将变形程度和材料特性有机地结合起来，因而开辟了深一层描述材料非弹性本构特性的途径的同时，我们不能满足内蕴时间是描述材料变形历史的基本参量的这种多少有些含糊的观念。这种“含糊”也许是人们花了较长时间经过多种方案的探索才得到适合金属的正确的内蕴时间定义的原因。这种情况说明了存在着将内蕴时间概念上升到新的理论高度的客观需要，以便在更坚实的物理基础上确定一个探索内蕴时间正确定义的准则，与此等价地给出应有的条件，使得本构方程的形式不变性能够严格地建立起来，下面表述的耗散型材料本构方程的形式不变性定律就是在上述背景下提出来的。

耗散型材料本构方程形式不变性定律：如果能够恰当地定义某些内蕴时间标度Z以使得耗散材料的广义内摩擦力$Q_{ij}^{(\alpha)D}$与相应内变量$q_{ij}^{(\alpha)D}$的广义变化率$dq_{ij}^{(\alpha)D}\Big/dZ$之间的数学关系$Q_{ij}^{(\alpha)D} = f_D(q_{ij}^{(\alpha)D})$，与粘弹性材料的相应关系$Q_{ij}^{(\alpha)V} = f_V(q_{ij}^{(\alpha)V})$在形式上一样，那么所研究的耗散材料的本构方程就与相应的粘弹性材料的本构方程具有完全相同的形式。

注意这里强调的本构方程形式相同的条件仅为两种材料的广义内摩擦力$Q_{ij}^{(\alpha)}$和相应的内变量$q_{ij}^{(\alpha)}$的广义变化率之间的关系有相同的形式。但为了使数学证明的思路简明起见，下面仅讨论对很多材料适用的成正比的形式，它概括了工程上应用很广的线性粘弹性理论与线性内蕴时间理论描述的全部材料。对于这些材料显然有（见(8·5·7)式）：

$$Q_{ij}^{(a)D} = b_{ijkl}^{(a)D} \frac{dq_{KL}^{(a)D}}{dZ} \qquad (b_{ijkl}^{(a)D} \text{——常数}) \tag{4·1}$$

$$Q_{ij}^{(a)V} = b_{ijkl}^{(a)V} \frac{dq_{KL}^{(a)D}}{dt} \qquad (b_{ijkl}^{(a)V} \text{——常数}) \tag{4·2}$$

其中符号"V"和"D"分别代表粘弹性材料和其它耗散型材料；t 是牛顿时间；Z 是内蕴时间标度，它可以多于一个以便能更恰当地描述材料的本构特性（见§10·11，在那里采用了三个内时标度来描述砂土的非线性本构方程）。

为了证明耗散型材料本构方程形式不变性定律，我们首先强调指出方程(8：3·44 a · b)、(8：3·42)、(8：4·13)、(8：4·14)及下述自由能 ψ 的表达式对所有耗散材料都合适，而与其具体构成无关。

$$\psi = \psi\ (\varepsilon_{ij},\ \theta,\ q_{ij}^{(a)}) \qquad \alpha = 1, 2 \cdots, n \tag{4·3}$$

这是因为上述方程是从不可逆热力学的基本概念、热力学第一定律和Clausius-Duhem 不等式推出的，而一般来说它们对不同耗散材料都是成立的；另外尽管对具体材料与变形过程来说内变量所代表的物理实体可能不同，但该理论体系所表达的基本概念(例如耗散材料的热力学状态可由温度、应变张量和内变量的一个完整集合唯一决定；其不可逆变形可由内变量的变化加以描述；该变化必须克服广义内摩擦力 $Q_{ij}^{(a)}$ 而消耗功等等)，这些都是不以耗散材料的具体组成而变化的。事实上粘弹性和其它耗散材料本构性质的区别仅在于它们各自的内变量演化方程不同，即其内变量的变化与广义摩擦力 $Q_{ij}^{(a)}$ 的关系不同。但是在将方程(8：4·14)与式(4·1)(4·2)分别组合后，我们对不同的耗散材料得到了下述形式完全相同的演化方程（摩擦系数及时间标度不同）

$$\frac{\partial \psi^{D}}{\partial q_{ij}^{(a)D}} + b_{ijkl}^{(a)D} \frac{dq_{kl}^{(a)D}}{dZ} = 0 \tag{4·4}$$

$$\frac{\partial \psi^{V}}{\partial q_{ij}^{(a)V}} + b_{ijkl}^{(a)V} \frac{dq_{kl}^{(a)V}}{dt} = 0 \tag{4·5}$$

其次我们指出正如通常的内变量理论假设的那样，内变量间是彼此独立的*。这一点非常重要，因为它将不同的内变量（或机制）的影响分开了，这等价于应力表达式中对应于内变量的各项是分开的。这一假设使得在保持本构形式不变性定律成立的条件下，不同材料可以有不同的内变量数目（它只影响核心函数的项数）并且可以采用几个内蕴时间标度。第三，我们指出方程(4.3)中的自由能密度 ψ 可以展成完全相同的形式和同等的阶次，例如在线性粘弹性理论和线性内时理论中 ψ 可表示为有关变量的二次函数，即

* 对所选的内变量不独立的情况，例如损伤内变量与滑移内变量间的耦合情况，耗散材料本构形式不变性的讨论详见[33]、[34]。

$$\psi = \frac{1}{2}A_{ijkl}e_{ij}e_{Kl} + \sum_{\alpha} B^{(\alpha)}_{ijkl}e_{ij}q^{(\alpha)}_{kl} + \sum_{\alpha} C^{(\alpha)}_{ijkl}q^{(\alpha)}_{ij}q^{(\alpha)}_{kl}$$

$$+ D_{ij}\theta e_{ij} + \sum_{\alpha} E^{(\alpha)}_{ij}\theta q^{(\alpha)}_{ij} + \frac{1}{2}F\theta^2 + \psi_0 \qquad (4\cdot6)$$

式中 ψ_0 为某种参考状态的自由能，θ 是相对于参考状态的小的温度变化，A_{ijkl}，B_{ijkl}，$C^{(\alpha)}_{ijkl}$，D_{ij}，$E^{(\alpha)}_{ij}$，F 及 b_{ijkl} 是与材料性质有关的常数（若分别对粘弹性材料与一般耗散型材料表出时，则应分别冠以上标“V”与“D”）。第四，我们强调说明两种材料都可取同样的初始条件，例如我们可恰当地选择不同的原点作为参考状态，使得

$$\sigma_{ij} = 0 \qquad e_{ij} = 0 \qquad \theta = 0 \qquad \begin{cases} t = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \qquad (4\cdot7)$$

正是因为这一条件我们已在方程(4·6)中将线性项舍弃了。至此为止我们已完成了整个的证明系统。具体地说如果我们将自由能的表达式(4·3)代入方程(4·4)和(4·5)，一般说我们可以得到两组非线性常微分方程组，而如果采用(4·6)，就得到了能够获得精确解的一阶线性微分方程组的特殊情况。由于这两种方程不仅对于两种材料而且对于每一个内变量都具有完全相同的形式，这使得每一个 $q^{(\alpha)}_{ij}$ 都能表示为同样形式（但常数不同）的应变张量和温度历史的泛函。将自由能ψ 的展开式(4·6)代入方程（8·3.44a），两种材料都给出了同样形式的本构关系，即 σ_{ij} 在一边，应变、温度和 $q^{(\alpha)}_{ij}$ 在另一边的相同的函数关系。当内变量 $q^{(\alpha)}_{ij}$ 从上述两大类结果中消去后，我们最后对两种材料得到了同样的应力泛函表达式，它是通过应变与温度来表达的；其间的差别仅在于各自的时间不同，这样本构方程的形式不变性定律就可以得到证明。

耗散型材料本构形式不变性定律的意义是不难看出的，它提供了理论基础和具体指南去发展一些包含有限变形在内的更现实的本构模型。具体地说它可籍助于直接和恰当地采用粘弹性力学中那些非常丰富和精美的本构方程来建立塑性与粘塑性材料的本构方程。此外这一定律将内蕴时间的引入与广义内摩擦力的描述紧密相连，通过它可能更容易寻求内蕴时间的恰当定义。这一概念也展示了（至少在原理上）将耗散材料的微观细观变形机制与材料非线性本构特性联系起来的意义极为深远的多种可能性。

§ 10·5 内蕴时间的定义及内时本构方程

本节我们将根据耗散材料本构方程形式不变性定律来致力于确定一大类材料内蕴时间的定义及建立内蕴时间本构方程。

我们知道各向同性粘弹性材料在等温小变形条件下的本构方程可表示为(参见第九章)。

$$S_{ij} = 2\int_0^t \mu(t-t')\frac{\partial e_{ij}}{\partial t'}dt', \qquad \mu(t) = \sum_{r_1=1}^{m}\mu_{r_1}e^{-\alpha_{r_1}t} \qquad (5\cdot1)$$

$$\sigma_{KK}=3\int_0^t K(t-t')\frac{\partial\varepsilon_{KK}}{\partial t'}dt',\quad K(t)=\sum_{r_1=1}^{m_1}K_{r1}\,e^{-\lambda_{r1}t} \qquad (5\cdot2)$$

由此可以判断塑性或粘塑性内时本构方程亦应能归化成相同的形式，只不过要用内时标度Z_D与Z_H来分别代替(5·1)和(5·2)中的t，而内变量的数目n_2、m_2也可与上式中的n_1与m_1不同罢了，写成显式就是

$$S_{ij}=2\int_0^{Z_D}\mu(Z_D-Z_D')\frac{\partial e_{ij}}{\partial Z_D'}dZ_D',\quad \mu(Z_D)=\sum_{r_2=1}^{n_2}\mu_{r2}e^{-\alpha r_2 Z_D} \qquad (5\cdot3a,b)$$

$$\sigma_{KK}=3\int_0^{Z_H}K(Z_H-Z_H')\frac{\partial\varepsilon_{KK}}{\partial Z_H'}dZ_H' \qquad (5\cdot4a)$$

$$K(Z_H)=\sum_{r_2=1}^{m_2}K_{r_2}e^{-\lambda_{r2}Z_H} \qquad (5\cdot4b)$$

且有$\mu(0)=\mu_0$和$K(0)=K_0$，即上述核心函数在零点之值分别等于剪切弹性模量与体积弹性模量。

现在的问题就是如何找到一个适用于各向同性材料的较好和较广泛的内蕴时间定义。为此我们有必要按照本构形式不变性定律指明的那样，把内蕴时间的定义与广义内摩擦力的表示密切联系起来。首先材料对塑性偏应变相关的内变量的抗力与对塑性体积应变相关的内变量的抗力是不同的，因而应当采用不同的内蕴时间标度来描述，这就是(5·3)与(5·4)中分别采用内时标度Z_D与Z_H的原因；其次为了避免在金属卸载时出现虚假的内摩擦力，在内蕴时间增量的定义中只应包含塑性应变增量而不应包含弹性应变增量(注：在与砂土的密实机制有关的情况中就不同，详见§10·11Ⅱ)；第三，在定义偏内时标度Z_D与体积内时标度Z_H时，应该分别采用塑性偏应变与体积偏应变，以及表示材料对偏应变与体应变广义摩擦力变化的不同的强(弱)化函数f_D与f_H(注：砂土由于存在水压造成的压实及剪应力造成的密实或剪胀这两种机制，因而针对体应变的耗散机制，应分别引入两种内时标度Z_h与Z_d，再加上对偏应变引入的Z_S共三个，相应的强化系数也应有f_h、f_d与f_S，详见§10·11Ⅱ。但在那里采用的是Gibbs自由能体系而这儿采用的是Helmholtz自由能体系)。第四，为了使新的内蕴时间定义适用于土壤和岩石等多种材料，应当考虑塑性偏应变与塑性体积应变在形成广义内摩擦力时的相互影响即耦合效应。现在我们用这些观点来考查 Valanis在1978年给出的内蕴时间的下述新定义[35]，就可看出它们是有一定道理的。

$$d\eta_{ij}=de_{ij}-\frac{k_1 ds_{ij}}{2\mu_0} \qquad (5\cdot5)$$

$$d\theta=d\varepsilon_{KK}-\frac{k_0 d\sigma_{KK}}{3K_0} \qquad (5\cdot6)$$

$$d\zeta_D=\|d\eta_{ij}\| \qquad (5\cdot7)$$

$$d\zeta_H=|d\theta| \qquad (5\cdot8)$$

$$dZ_D^2 = \alpha_{00}d\zeta_D^2 + \alpha_{01}d\zeta_H^2 \tag{5·9}$$

$$dZ_H^2 = \alpha_{10}d\zeta_D^2 + \alpha_{11}d\zeta_H^2 \tag{5·10}$$

式中μ_0、K_0分别为剪切弹性模量与体积弹性模量。由式(5·5)—(5·8)可见，如果$k_0 = k_1 = 1$，则$d\eta_{ij}$与$d\theta$分别表示塑性偏应变分量的增量与塑性体应变的增量，而$d\zeta_D$则变成了塑性偏应变空间的欧几里德模，$d\zeta_H$则是体积塑性应变的绝对值。这里ζ通称为内蕴时间量度，它们通过一些反映材料性质变化及耦合效应的函数α_{ij}以最后确定内蕴时间标度Z_D与Z_H。由于累计的塑性应变对材料的强弱化影响很大，因而α_{ij}应是ζ_D或ζ_H的函数，对粘塑性材料，应变率对材料性能的影响亦很大，因而它们还应是内时量度变化率$\dot{\zeta}_D$与$\dot{\zeta}_H$的函数。显然α_{01}与α_{10}是表示偏斜响应与体积响应间的耦合效应的(注：在§10·11中用另一种方式给出了这种耦合效应)。如果这种耦合效应不存在，则有

$$\alpha_{10} = \alpha_{01} = 0 \tag{5·11}$$

$$dZ_D = d\zeta_D/f_D(\zeta_D, \dot{\zeta}_D) \tag{5·12}$$

$$dZ_H = d\zeta_H/f_H(\zeta_H, \dot{\zeta}_H) \tag{5·13}$$

式中 $f_D = 1/\sqrt{\alpha_{00}}$ ， $f_H = 1/\sqrt{\alpha_{11}}$ (5·14)

对于各向异性的非弹性材料，其内蕴时间量度可写成

$$d\zeta^2 = P_{ijkl}d\varepsilon_{ij}^I d\varepsilon_{kl}^I \tag{5·15}$$

$d\varepsilon_{ij}^I$为非弹性应变，当只考虑塑性变形造成的不可逆应变时，有

$$d\varepsilon_{ij}^I = d\varepsilon_{ij}^P = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^e \tag{5·16}$$

$d\varepsilon_{ij}^P$与$d\varepsilon_{ij}^e$分别是塑性应变分量与弹性应变分量。为了求得内蕴时间标度Z，原则上应当引入一个反映材料性质变化的强(弱)化函数将式(5·15)进行数学变换后去求得dZ。在〔36〕中考虑了一个简化的办法，直接将dZ定义为

$$dZ^2 = Q_{ijkl}(Z)d\varepsilon_{ij}^I d\varepsilon_{kl}^I \tag{5·17}$$

$Q_{ijkl}(Z)$与(5·15)中的P_{ijkl}不同的是，后者是非弹性应变空间中的四阶度量张量，它除与材料的原始力学性质和点的座标有关外，与过程无关。而Q_{ijkl}则是Z的函数，它还取决于材料在变形过程中性质的变化。对各向异性非弹性材料的本构方程可采用粘弹性力学中的现成结果按形式不变性定律直接写出为

$$\sigma_{ij} = \int_0^Z B_{ijkl}(Z - Z')\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial Z'}dZ' \tag{5·18}$$

上式与直接根据含内变量的不可逆热力学推出的本构方程是一致的，有兴趣的读者请参阅〔34〕。

下面我们仍回到等温和小变形下弹塑性内时本构方程的讨论，首先我们应对本构方程(5·3a)与(5·4a)的形式进行改造，其原因在于当dZ_D与dZ_H用不可逆变形的增量表示，

而de_{ij}与$d\varepsilon_{KK}$却又包含弹性应变增量时，上述方程使用起来很不方便，且容易造成较大误差。为此我们将（5·5）式得到的de_{ij}的表达式代入方程（5·3a）的积分号内，然后将含S_{ij}的项都移至左边，再进行拉普拉斯变换及其逆变换，即可求得〔35〕

$$S_{ij}(Z_D)=2\mu_0\int_0^{Z_D}\rho(Z_D-Z_D')\frac{\partial e_{ij}^P}{\partial Z_D'}dZ_D' \tag{5·19}$$

式中$\rho(Z_D)$是通过下述积分方程与原有的核心函数$\mu(Z_D)$联系起来的

$$\mu_0\rho(Z_D)-k_1\int_0^{Z_D}\rho(Z_D-Z_D')\frac{\partial\mu}{\partial Z_D'}dZ'_D=\mu(Z_D) \tag{5·20}$$

对k_1为1的情况，可以证明当$\mu(Z_D)$由（5·3b）中的核心函数表示时，$\rho(Z_D)$可表成

$$\rho(Z_D)=\rho_0\delta(Z_D)+\rho_1(Z_D) \tag{5·21}$$

且 $$\rho_1(Z_D)=\sum_{r_1=1}^{n_1-1}R_re^{-\beta_rZ} \tag{5·22}$$

将（5·21）式代入（5·19）中可得

$$S_{ij}=S_y^0\frac{de_{ij}^P}{dZ_D}+2\mu_0\int_0^{Z_D}\rho_1(Z_D-Z_D')\frac{\partial e_{ij}^P}{\partial Z_D'}dZ_D' \tag{5·23a}$$

式中 $S_y^0=2\mu_0\rho_0$，它具有屈服应力的意义。若令

$$r_{ij}=2\mu_0\int_0^{Z_D}\rho_1(Z_D-Z_D')\frac{\partial e_{ij}^P}{\partial Z_D'}dZ_D' \tag{5·24}$$

则式（5·23a）可写成

$$S_{ij}-r_{ij}=S_y^0\frac{de_{ij}^P}{d\zeta_D}f(\zeta_D) \tag{5·25}$$

式（5·25）或（5·23a）的几何解释已清楚地表示在（图10·16）中。式（5·23a）或（5·25）是十分重要的表达式，因为它表明了在内蕴时间新定义的简化情况下，我们得到了屈服面存在时的内时本构方程。仿照上面相同的步骤，可以证明当$k_0=1$时其水压应力响应可由下式表示

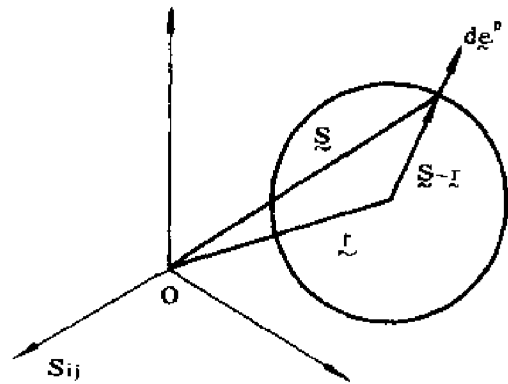


图10·16 方程(5·25)的几何解释

$$\sigma=\sigma_y^0\frac{d\theta}{dZ_H}+K_0\int_0^{Z_H}\phi_1(Z_H-Z_H')\frac{\partial\theta}{\partial Z_H'}dZ'_H \tag{5·23b}$$

式中$\sigma=\sigma_{KK}/3$，而θ为塑性体积应变。

方程（5·23a,b）给出的屈服面内时本构方程是当ζ_D在六维的偏应变塑性空间中定义($k_0=1$)，而ζ_H是在一维的体积塑性应变实轴上定义($k_1=1$)这一特殊情况下得出的。

(5·23a)与(5·23b)左边第一项表征着屈服面(点)大小的变化，而第二项则描述着屈服面(点)中心的移动。一个十分重要而饶有兴趣的问题是，这种从含内变量的不可逆热力学出发得到的内时屈服面本构方程，与以屈服面的存在为基本假设和前提并以 Drucker—Ильюшин公设为基础得出的经典塑性理论的本构方程会有什么样的联系与区别，关于这一问题的详细讨论请读者见〔26〕，下面我们只列出其主要结果

(1)．在内时理论中屈服面的形状将依赖于与广义内摩擦力密切相连的内蕴时间Z的定义。在各种不同的内蕴时间Z的恰当选择下，可以得到各种不同的屈服面形状。作为特例，在$k_0=1$，$k_1=1$的简化情况下，屈服面是一个在偏应力S_{ij}空间中移动的球面(图 10·16)。在塑性变形过程中随着材料的强化和弱化($f(\zeta)$增加或减小)，该球面的半径(由式(5·25)的右边给出)将增大或减小，其对应的初始屈服面与Von-Mises准则一致。由式(5·25)及(图10·16)可见塑性应变增量垂直于屈服面，即满足垂直性法则，而在屈服面内的卸载是弹性的(注 1：若不采用上述简化后的内时定义，可以得到非关联流动的情形；注 2：应力空间中的后继屈服面，根据经典塑性理论的基本假设是不可能向其内部缩小的，但在内时理论中，对材料弱化的情况，我们得到了向内收缩的屈服面)。

(2)．该屈服面中心的移动，不是根据一个假设的规则得到的，而是按照内时理论推出的解析公式得出的，即由式(5·24)根据材料的性质，通过记忆函数$\rho(Z)$、强(弱)化函数$f(\zeta)$和塑性应变史由表达屈服面中心矢径$\underset{\sim}{r_{ij}}$运动规律的遗传积分来决定的。然而在经典理论中并未能给出屈服面中心的变化dr_{ij}与加载历史的解析关系，却是给出了一些假设，如上节谈到的Prager假设和Ziegler假设等。很重要的是这些假设只是式(5·24)的一种简化和特殊的情况，事实上当$\rho_1(Z)$取成常数ρ_1时，由式(5·24)有

$$dr_{ij}=2\mu_0\rho_1 de^p_{ij} \tag{5·26}$$

将它与式(2·9d)比较，可确证它表达的正是Prager假设，且有

$$C=2\mu_0\rho_1=\text{常数} \tag{5·27}$$

C为常数表明式(5·26)给出的是线性强化，这种本构关系给出了应力随塑性应变直线变化的响应特性。另外若$\rho_1(Z_D)$是下式表达的衰减指数

$$\rho_1(\zeta_D)=\rho_1 e^{-\alpha\zeta_D} \tag{5·28}$$

若先不考虑屈服面的胀缩即设$f(\zeta)=1$，则由式(5·24)与(5·25)不难得到

$$dr_{ij}=(2\mu_0\rho_1/S^0_y)(S_{ij}-\beta r_{ij})d\zeta_D \tag{5·29a}$$

$$\beta=1+2S^0_y/2\mu_0\rho_1 \tag{5·29b}$$

它给出的是一种新的运动强化规则，使得Ziegler随动强化规则只是它的一个特例。事实上若令$\beta=1$，则式(5·29)表达的规律与式(2·10b)完全一样，屈服面中心的移动恰在其瞬时中心至屈服面加载点σ_{ij}的射线上，并可决定Ziegler规则中$d\mu$之值为

$$d\mu=2\mu_0\rho_1 d\zeta_D/S^0_y \tag{5·30}$$

即μ将与内蕴时间量度成正比。若$\beta\neq1$，则屈服面的移动要与上述方向成一定倾角，其值

与β有关。进而若$f(\zeta)\neq 1$，则可得到又膨胀又移动的混合强化模型*。

以上的讨论表明内时模型的确是一个比经典模型更现实和适用范围更广泛的模型。它不以屈服面的存在作为发展理论的假设和基本前提，但是在恰当的内蕴时间定义下，它可以描述某些材料呈现屈服面的特性。更为重要的是它能推出解析的公式来描述这些材料的屈服面随加载历史而变化的情形，其中包括屈服面膨胀与收缩，形状改变等复杂的材料性质。尽管如此，但是避开屈服面来进行材料非弹性本构特性的描述，仍是富有吸引力的，也是内时理论从一开始就特别加以强调的[32]。这一方面可以避开本构方程在应力空间的不连续性，较好地排除由于屈服面而引入的许多实验与计算的困难，而更重要的是可以得到与实际情况更为吻合的结果。

材料一开始受力就出现极微小的塑性变形的情况，可由下列两个条件来作出数学上的描述

$$S_y^0=0 \tag{5·31}$$

$$\rho_1(0)=\infty \tag{5·32}$$

式（5·31）相当于屈服面的半径收缩为零的条件，而（5·32）则描述着塑性变形一开始应力就急剧上升的影响，它相应于 S_{ij}-e_{ij}^p曲线原点处斜率可达无穷大的理想情况。在上述条件下从式（5·23）可得到下述含弱奇异性的塑性内时本构方程

$$S_{ij}=\int_0^{Z_D}\rho(Z_D-Z_D')\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial Z_D'}dZ_D' \tag{5·33}$$

与上述分析完全相似，当$\sigma_y^0=0$，$\phi_1=\infty$时则可得

$$\sigma=\int_0^{Z_H}\phi(Z_H-Z_H')\frac{\partial\theta}{\partial Z_H'}dZ_H' \tag{5·34}$$

对金属材料在一般载荷条件下，可假设为塑性不可压的，则体积变形为纯弹性的。由(5·4a)及$K(0)=K_0$的条件即可求得大家熟悉的下述本构方程

$$\sigma_{KK}=3K_0\varepsilon_{KK} \tag{5·35}$$

下面我们限于讨论塑性不可压的情况，而把岩土等可压缩的情形留在§10·11中去讨论。为简化起见在此情形下可把下标D甩去。式（5·33）给出了无屈服面的内时本构方程，而弱奇异性则是其重要的特性。为了满足弱奇异性的要求，文[15]给出了有关的分析，证明了

$$\rho(Z)=\sum_{r=1}^{\infty}R_r e^{-\beta_r Z} \tag{5·36}$$

并要求

*关于近年来发展的Chaboche、Mroz等的非线性运动强化规则，Mroz、Krieg、Dafalias等发展的多重屈服面理论可作为内时理论特殊情况的讨论可参见Watanabe和Atluri的论文"Internal Time, General Internal Variable, And Multi—Yield—Surface Theories of Plaeticity And Creep, A Unification of Concepts"（International Journal of Plasticity, Vol. 2, PP. 37—57, 1986）

$$\sum_{r=1}^{\infty} R_r = \infty \quad , \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{R_r}{\beta_r} < \infty \qquad (5\cdot37a,b)$$

式（5·37a）是为了满足弱奇异性的要求，而（5·37b）则是满足可积性的要求。式(5·36)相当于式(5·3b)中的n_2取无穷大的情况。当然其它形式的具有弱奇异性的函数也可以作为核心函数，例如幂函数与下述有限项级数的组合

$$\rho(Z) = Z^{-\alpha} \sum_{r=1}^{n} R_r e^{-\beta_r Z} \qquad (5\cdot38)$$

其中 $0<\alpha<1$,$R_r>0$,$\beta_r \geqslant 0$，若令 $n=1$，$\beta_r=0$；则得到了 $\rho(Z)=R_1/Z^\alpha$ （5·39a）

若 $n=1$，$\beta_1>0$，则得到

$$\rho(Z) = \frac{R_1 e^{-\beta_1 Z}}{Z^\alpha} \qquad (5\cdot39b)$$

将（5·39a）式代入式（5·33）中可以确证这一三维的本构方程在单轴状态下确实能给出象Osgood-Ramberg那样的本构关系，并且正是在§10·3的模型中研究过的那种本构方程。（5·39b）则是一个适用变形范围更广泛的核心函数。

分析式（5—36）或（5—38）的结构可以看出具有奇异性的塑性内时本构方程(5—33)由于作为其本质性特点的奇异性核心函数的引入，使数学上的处理十分复杂；这些情况使内时理论的应用受到了很大限制，也无法在较复杂的条件下进行实验验证，因而在1980年左右的一段时间内实际上已处于停滞状态。这种情况说明了发展一种新的内时本构方程的迫切需要。为了便于在实际中应用，概括起来说，对这种本构方程的要求，应当包括以下几个方面：首先它应不含屈服面，但是屈服面的情况又可以作为它的特例而存在；第二能将弹塑性响应综合在一个本构方程内，而不象式（5·23a)和(5·23b）那样，只计及了塑性响应，第三应当具有易于用电子计算机处理的形式，既要将其变成增量型的方程以便于计算复杂加载，又要反映变形历史的重要影响，更重要的是要便于解决由于涉及整个变形历史而要求存贮大量信息的问题；第四本构方程的构成应易于根据简单的试验去决定有关的材料函数。要满足这样一些综合性的要求，必须联系到问题的物理背景并采用恰当的数学处理来解决。让我们联系到弱奇异性来考虑材料在所研究的变形范围内的实际的响应问题。这种弱奇异性反映着材料微结构对使它开始出现不可逆变形的外界作用的剧烈阻抗。这种阻抗的具体机制可能是错综复杂的，包含着很多不同的因素，因而一个完整和精确的描述，从理论上来说可能需要引入无穷多个内变量，这就是Valanis使式(5·36）取得无穷多项的原因。然而正如我们在§8·1中一再强调的观点所指出的，对建筑在现象学上的模型来说，重要的是如何用尽量少的内变量去宏观平均地表征内部结构变化对应力应变关系的影响，并由试验去决定由此引入的宏观参数。这里说的材料结构变化对本构关系的影响，是通过相应的内部阻抗来描述的。可以合理地认为在塑性变形刚开始时，某种特定的不可逆变形机制起着控制性的作用，它可以宏观平均地用内变量 $q_{ij}^{(1)}$ 及其相应的抗力等来加以描述，而其他的机械及其相应的内变量的作用，要在塑性变形进一步发展后才能逐次地表现得明显起来。

对于内变量 $q_{ij}^{(1)}$ 及其影响下的材料响应特性，在采用式（8·4·14）与（4·1）并将ψ展

成 e_{ij}与 q 的二次函数后，容易推出其本构方程为

$$\underset{\sim}{S} = \beta_0 \int_0^Z \alpha_1 e^{-\alpha_1(Z-Z')} \partial \underset{\sim}{e}^p / \partial Z' \, dZ' \tag{5·40}$$

注意到当 α_1 足够大时，上式中的核心函数 $\rho(Z)$是 δ 函数的一个近似，它描述了在塑性变形刚开始时，应力随塑性变形发展而剧烈上升的响应，并且理想的屈服点或屈服面，将作为$\alpha_1 \to \infty$的情况而存在（屈服应力将与β_0成比例）。当塑性变形发展到一定范围后，其它对进一步产生变形抗力承担主要作用的机制的影响将变得明显起来，设该机制以内变量$q_{ij}^{(2)}$ 及其有关因素来表征，当变形很大时还可以有 $q_{ij}^{(3)}$等等，但从实验结果发现，当取首项系数C_1和α_1足够大时，三个内变量就足以描述在通常感兴趣的变形范围内的弹塑性响应特性，这对应着下述核心函数

$$\rho(Z) = \beta_0 \alpha_1 e^{-\alpha_1 Z} + C_2 e^{-\alpha_2 Z} + C_3 e^{-\alpha_3 Z} \qquad (\alpha_1\text{足够大}) \tag{5·41a}$$

当然一般说$\rho(Z)$可表示为

$$\rho(Z) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\alpha_i Z} \tag{5·41b}$$

显然重要的是如何决定式中的系数。容易根据上述变形机理的分析，将上式中的各项与简单拉伸曲线的有关区段定性的联系起来，再用曲线拟合的办法，基于靠近原点处一些试验点的集合，定出α_1，α_2，α_3，β_0，C_2和C_3等常数值。进一步鉴于$\rho(Z)$在$Z=0$的邻域内急速从∞衰减至零的特性认为，强化函数 $f(\zeta)$ 是一个在该区域中较之核心函数$\rho(Z)$变化十分缓慢的函数，这提供了将它们分离开来，并将它们在不同的试验区段中加以决定的数学基础〔24〕、〔25〕。具有式（5·41）的$\rho(Z)$的形式在开区间（0，∞）内是连续可微的，因而可将式（5·33）对Z进行微分，并忆及

$$de_{ij}^p = de_{ij} - \frac{1}{2\mu_0} dS_{ij} \tag{5·42}$$

经过一些代数运算，不难得到

$$d\underset{\sim}{S} = 2\mu_p d\underset{\sim}{e} + \lambda_p \underset{\sim}{h} dZ \tag{5·43}$$

式中 "$\sim$" 是二阶张量的符号。上式亦可写成下述矩阵形式：

$$\{d\sigma\} = \{D\}\{d\varepsilon\} + \{dH_p\} \tag{5·44}$$

式（5·43）或（5·44）就是参考文献〔24〕、〔25〕中提出的新型弹塑性内时本构方程。它在总体上看是增量型的，并将线性部分（右边第一部分）与非线性部分分开了。后者是通过遗传积分型的项$\underset{\sim}{h}(Z)$来引入加载历史影响的。在式（5·43）中的符号如下：

$$\mu_p = \frac{1}{2}\rho(0) \Big/ \left(1 + \frac{\rho(0)}{2\mu_0}\right), \qquad \lambda_p = 1 \Big/ \left(1 + \frac{\rho(0)}{2\mu_0}\right) \tag{5·45a,b}$$

$$\underset{\sim}{h}(Z) = \int_0^Z \hat{\rho}(Z-Z') \frac{\partial \underset{\sim}{e}^p}{\partial Z'} dZ', \quad \hat{\rho} = d\rho/dZ \tag{5·46a,b}$$

方程（5·43）与（5·44）是三维的本构方程，它容易根据具体的变形状态写成具体的形式。对于平面问题我们有

$$\{D\}=\begin{Bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_p \end{Bmatrix} \tag{5·47}$$

$$dH_p=\begin{Bmatrix} dH_{px} \\ dH_{py} \\ dH_{pxy} \end{Bmatrix} \tag{5·48}$$

上述两矩阵中的元素，在平面应力与平面应变下的具体表达式可参见表10-1。显然根据本构方程（5·44）及（5·46）不难发展一种便于在工程中应用的有限元计算方法，以及得到 $\underset{\sim}{h}(Z)$ 的一种简易递推公式，使得该历史效应的考虑极易在计算机中实现，因而开辟了在广阔的工程实际问题及力学的其它分支中应用的前景，我们将在以下几节中对它们的应用作较详细的讨论。

表 10-1

平面应力	平面应变
$C_1=\dfrac{12K\mu_p+4\mu_p^2}{3K+4\mu_p}$	$C_1=\dfrac{3K+4\mu_p}{3}$
$C_2=\dfrac{6K\mu_p-4\mu_p^2}{3K+4\mu_p}$	$C_2=\dfrac{3K-2\mu_p}{3}$
$D_1=\dfrac{2\mu_p(3K-2\mu_p)}{3K+4\mu_p}$	$dH_{px}=2\mu_p h_x(Z)\dfrac{dZ}{\rho(0)}$
$dH_{px}=\{2\mu_p h_x(Z)-D_1 h_Z(Z)\}\dfrac{dZ}{\rho(0)}$	$dH_{py}=2\mu_p h_y(Z)\dfrac{dZ}{\rho(0)}$
$dH_{py}=\{2\mu_p h_y(Z)-D_1 h_Z(Z)\}\dfrac{dZ}{\rho(0)}$	$dH_{pxy}=2\mu_p h_{xy}(Z)\dfrac{dZ}{\rho(0)}$
$dH_{pxy}=\{2\mu_p h_{xy}(Z)\}\dfrac{dZ}{\rho(0)}$	

§ 10·6 内时理论在梁的弹塑性分析中之应用[37]

从本节起我们介绍内时理论的应用，为了便于读者接受，我们从较简单又有工程意义的弹塑性梁的分析开始，其中关于弯矩与应力及转角的关系极易用到圆轴扭转的弹塑性分析中去，有兴趣的读者请看参考文献[28]。

在经典塑性理论中，由于屈服点及屈服面的引入，使得梁的弹塑分析显得较为复杂。从一个截面来看就分为弹性核与其外的屈服区；从全梁来看又分为弹性区段与弹塑性区段，它们的应力应变或曲率弯矩间的关系各不相同，给梁的弹塑性变形计算及静不定梁的应力与强度分析带来了较大的困难。人们被迫采用理想弹塑性的假设，并常限于用理想化的塑性铰的概念进行极限分析，显然这是难以满足工程界使梁进入弹塑性范围内工作而提出的要求的。在内时理论中由于对弹塑性材料采用统一的本构描述，就易于发展一种与真实材料特性较吻合的弹塑

性梁与静不定梁的分析方法。

Ⅰ．梁的内时弹塑性本构方程

在等温和小变形条件下各向同性塑性不可压缩材料的内时本构方程是

$$S_{ij}=\int_0^Z \rho(Z-Z')\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial Z'}dZ' \tag{6·1}$$

其中 $dZ=d\zeta/f(\zeta)$ （6·2）

$$d\zeta=\|de_{ij}^p\|=\|de_{ij}-\frac{dS_{ij}}{2\mu_0}\| \tag{6·3}$$

上述三式分别是式（5·33）、（5·12）及（5·7）省去下标D的结果，并已采用了材料率无关及$k_1=1$的条件。为满足核心函数弱奇异性的要求，可按式（5·38）取$\rho(Z)$的形式如下：

$$\rho(Z)=Z^{-\alpha}\sum_{r=1}^{n}R_r e^{-\beta_r Z} \qquad (0<\alpha<1)$$

若限于研究小弹塑性变形，可取$\beta_r=0$和$n=1$，则上式简化为：

$$\rho(Z)=R_1/Z^\alpha \qquad (0<\alpha<1) \tag{6·4}$$

由于在小变形范围内，核心函数$\rho(Z)$是一个远较强化函数$f(\zeta)$变化为快的函数（它在很小的范围内从∞衰减至零），因此可取$f(\zeta)$为一常数。但由于该常数可吸收至核心函数的常数中，故不失一般性，在小变形范围内（对应于较小的内蕴时间标度Z^*以内）可取

$$f(\zeta)=1 \qquad (0\leqslant Z\leqslant Z^*) \tag{6·5}$$

将（6·4）代入（6·1），并利用（6·2）、（6·3）和（6·5）可得梁的本构方程为（不计剪应力的影响）

$$\sigma=D(\varepsilon-\sigma/E)^\beta \tag{6·6}$$

或

$$\varepsilon=\sigma/E+(\sigma/D)^{1/\beta} \tag{6·7}$$

其中

$$D=\frac{R_1}{\beta}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1+\beta}{2}} \tag{6·8}$$

$$\beta=1-\alpha \tag{6·9}$$

β与D为表征材料本构特性的参数。

Ⅱ．曲率$K(x)$与弯矩$M(x)$的关系

对于一般工程上采用的弹塑性梁，平截面假设仍可适用，剪应力的影响可以忽略，故有如下的几何关系〔29〕

$$\varepsilon=K(x)y \tag{6·10}$$

式中$K(x)$为x截面上的曲率，为简明起见，我们仅讨论矩形截面梁，设b为梁宽，h为梁高，则截面上弯矩平衡方程为

$$M=2b\int_0^{h/2}y\sigma dy \tag{6·11}$$

从方程（6·6）、（6·10）和（6·11）可以得到以截面上最大拉压力σ_{max}表达的弯矩$M(x)$

和曲率$K(x)$

$$M(x)=\frac{\nu_1\sigma_{max}^3+\nu_2\sigma_{max}^{a+1/\beta}+\nu_3\sigma_{max}^{1+2/\beta}}{\frac{\sigma_{max}}{E}+\left(\frac{\sigma_{max}}{D}\right)^{1/\beta}} \qquad (6\cdot12)$$

$$K(x)=\frac{2}{h}\left[\frac{\sigma_{max}}{E}+\left(\frac{\sigma_{max}}{D}\right)^{1/\beta}\right] \qquad (6\cdot13)$$

其中

$$\nu_1=bh^2/12E^2 \qquad (6\cdot14)$$

$$\nu_2=bh^2(1+\beta)/[4(1+2\beta)ED^{1/\beta}] \qquad (6\cdot15)$$

$$\nu_3=bh^2/[4(2+\beta)D^{2/\beta}] \qquad (6\cdot16)$$

视σ_{max}为参数，则对任一特定的梁，$K(x)$总可以表示为$M(x)$的函数

$$K(x)=K(M(x)) \qquad (6\cdot17)$$

上式可以展开成马克劳林级数

$$K=a_1M+a_2M^2+a_3M^3+\cdots\cdots \qquad (6\cdot18)$$

注意到弯矩改变正负号时曲率亦应改变符号，所以M的偶次方项的系数应为零。我们取$K(x)$为M的三次奇次函数，计算表明它在工程应用中已有足够的精度。故有

$$K(x)=a_1M(x)+a_3M^3(x) \qquad (6\cdot19)$$

a_1和a_3是依赖于材料性质和截面几何参数的常数，可采用下述方法加以确定：在构件最大工作应力范围内，取一组参数σ_{max}，并分别求得与之相应的K与M，再由K与M的对应关系用曲线拟合的方法去确定a_1与a_3。在弹性梁中$K=M/EI$，故a_1应与$1/EI$近似相等。

由曲率和挠度的微分关系可得

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=a_1M+a_3M^3 \qquad (6\cdot20)$$

当限于研究小挠度时可以忽略y'^2，于是有

$$y''=a_1M+a_3M^3 \qquad (6\cdot21)$$

对上式积分可得转角和挠度方程

$$\theta(x)=\int(a_1M+a_3M^3)dx+C \qquad (6\cdot22)$$

$$y(x)=\int\left[\int(a_1M+a_3M^3)\,dx\right]dx+cx+D \qquad (6\cdot23)$$

Ⅲ. 静定梁弹塑性分析

梁的内时弹塑性分析可参考下列步骤进行：由材料的拉伸实验曲线在原点邻域的某个小范围$(0,Z^*)$内定出一系列对应的σ-ε^p曲线上的点*，然后用拟合的方法求得D与β，进而将它们与梁的尺寸及弹性模量E一起按式（6·14）—（6·16)去决定ν_1、ν_2和ν_3。再从式(6·12)由工作弯矩$M(x)$去求得σ_{max}，并由方程（6·13）、（6·10）和（6·7）去求得横截面上的应力分布，对（图10·17）的静定梁(45钢)所得的横截面的应力分布如(图10·18)。它与经典塑性理论中理想弹塑性梁的折线式分布有着很大的差别。

*不难由式(6.1)证明核心函数$\rho(Z)$与拉伸曲线的斜率$d\sigma/d\varepsilon^p$存在下述关系：$\rho(Z)=2/3\times d\sigma/d\varepsilon^p$，故可取$\sigma\sim\varepsilon^p$曲线上斜率开始变为很小的点对应的内蕴时间作为$Z^*$

为了研究梁的变形，首先按上面所述的方法确定a_1和a_3，对(图10·17)所示的静定梁我们得到

$$a_1 = 2.5\times10^{-8}Kg^{-1}mm^{-2}\quad,\quad a_3 = 1.22\times10^{-13}Kg^{-3}mm^{-4}$$

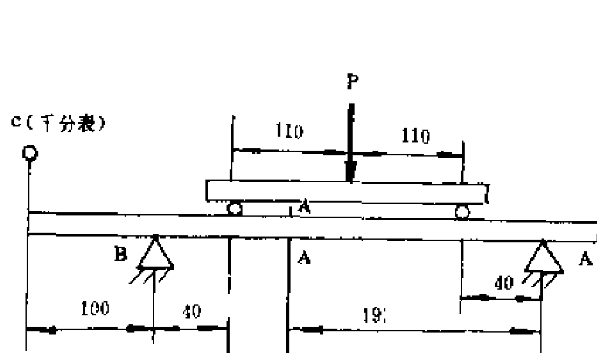


图10·17 静定梁的实验装置图

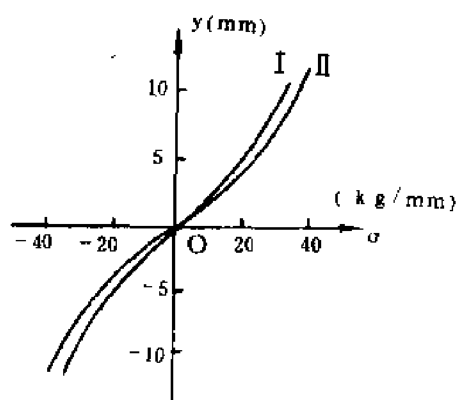


图10·18 横切面的应力分布图
曲线Ⅰ：对应载荷P=2800Kg
曲线Ⅱ：对应载荷P=3100Kg

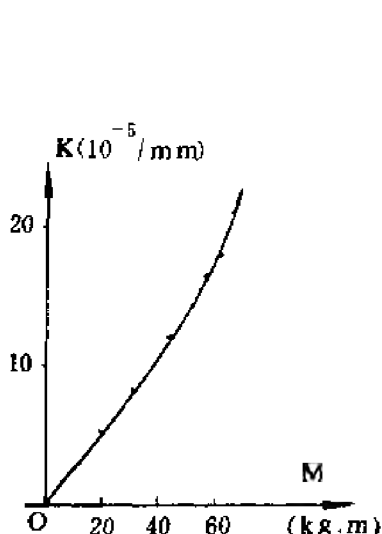


图10·19 曲率K与弯距M的关系

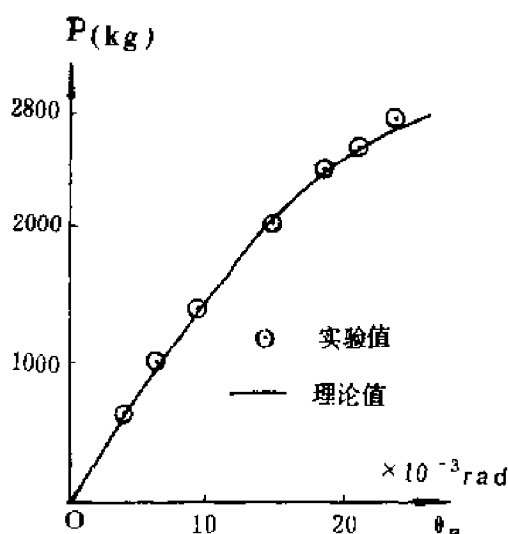


图10·20 外载荷P与B点转角θ_B的关系

由这些系数给出的三次曲线与对应的点吻合得很好(图10·19)。于是，该梁的小挠度微分方程为：

$$d^2y/dX^2 = 2.5\times10^{-8}M(x) + 1.22\times10^{-13}M^3(x) \qquad (6\cdot24)$$

对上式进行积分，并用边界条件决定常数，即可决定梁的挠曲线。将由千分表测得的梁的左端点的转角θ与计算所得的值比较(图10·20)，发现两者是较吻合的。

Ⅳ. 静不定梁的弹塑性分析

目前，梁的内时分析已可解决各种载荷下连续梁与平面框架的弹塑性问题，由于采用微机计算，梁的几何尺寸与载荷状况可自动输入到相应的矩阵的对应位置上，并自动建立起非线性的联立的三弯矩方程组和打印出计算结果。为了叙述简明起见，我们仅以(图10·21)的四跨梁在各跨中点受集中载荷为例，讨论非线性三弯矩方程建立的原理。借助于连续梁的解

法，取支承处横截面上的弯距为多余约束，则每一跨梁可看作支承处有集中偶矩且中点受集中力的简支梁。对于坐标为（x_{i-1}，x_i）的梁段，支承处的转角为

左端点：

$$
\begin{aligned}
\theta_i(x_{i-1}) &= -\frac{1}{L_i}\int_0^{L_i}\int_0^{x}(a_1M + a_3M^3)dxdx \\
&= -\Big[\frac{a_3L_i}{5}M^3_{i-1} + \frac{a_3L_i}{20}M_i^3 + \frac{3a_3L_i}{20}M^2_{i-1}M_i + \frac{a_3L_i}{10}M_{i-1}M_i^2 \\
&\quad + \frac{9P_iL_i^2a_3}{128}M^2_{i-1} + \frac{5a_3P_iL_i^2}{128}M_i^2 + \frac{5a_3P_iL_i^2}{64}M_{i-1}M_i \\
&\quad + \left(\frac{a_1L_i}{3} + \frac{11a_3P_i^2L_i^2}{640}\right)M_{i-1} + \left(\frac{a_1L_i}{6} + \frac{9a_3L_i^3P_i^2}{640}\right)M_i \\
&\quad + \frac{a_1}{16}P_iL_i^2 + \frac{a_3P_i^3L_i^4}{512}\Big]
\end{aligned}
\tag{6·25}
$$

右端点：

$$
\begin{aligned}
\theta_i(x_i) &= \theta_i(x_{i-1}) + \int_0^{L_i}(a_1M + a_3M^3)dx \\
&= \frac{a_3L_i}{20}M^3_{i-1} + \frac{a_3L_i}{5}M_i^3 + \frac{a_3L_i}{10}M^2_{i-1}M_i + \frac{3a_3}{20}L_iM_{i-1}M_i^2 \\
&\quad + \frac{5a_3P_iL_i^2}{128}M^2_{i-1} + \frac{9a_3P_iL_i^2}{128}M_i^2 + \frac{5a_3L_i^2P_i}{64}M_{i-1}M_i \\
&\quad + \left(\frac{a_1L_i}{6} + \frac{9a_3L_i^3P_i^2}{640}\right)M_{i-1} + \left(\frac{a_1L_i}{3} + \frac{11a_3L_i^3P_i^2}{640}\right)M_i \\
&\quad + \frac{a_1P_iL_i^2}{16} + \frac{a_3L_i^4P_i^3}{512}
\end{aligned}
\tag{6·26}
$$

为了建立三弯矩方程，象通常一样，利用 i 支座处转角的连续条件

$$\theta_i(x_i) = \theta_{i+1}(x_i) \tag{6·27}$$

由式（6·25）与（6·26）即可得到以三弯矩表示的上式的展开式。若设各梁跨度 L 一样，P_i 值一样，则得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_3L}{20}\left(M^3_{i-1} + 8M_i^3 + M^3_{i+1}\right) + \frac{a_3L}{10}\Big(M^2_{i-1}M_i + \frac{3}{2}M_i^2M_{i+1} \\
&\quad + \frac{3}{2}M_{i-1}M_i^2 + M_iM^2_{i+1}\Big) + \frac{5a_3PL^2}{128}\left(M^2_{i-1} + \frac{18}{5}M_i^2 + M^2_{i+1}\right) \\
&\quad + \frac{5a_3PL^2}{64}\left(M_{i-1}M_i + M_iM_{i+1}\right) + \left(\frac{a_1L}{6} + \frac{9a_3L^3P^2}{640}\right)M_{i-1} \\
&\quad + 2\left(\frac{a_1L}{3} + \frac{11a_3L^3P^2}{640}\right)M_i + \left(\frac{a_1L}{6} + \frac{9a_3L^3P^2}{640}\right)M_{i+1} \\
&\quad + \frac{a_1PL^2}{8} + \frac{a_3L^4P^3}{256} = 0
\end{aligned}
\tag{6·28}
$$

$= 0$

在上式中分别令 $i=1,2,3$ 等即可得到非线性三弯矩方程的联立方程式。它们不难用小型的计算机求解，例如采用下降法[19]。为了得到较好的初值，只需在上式中令$a_3=0$来求解，这相应于弹性解作为初值的情况（对应于材料力学中的三弯矩方程）。

为了验证方法的正确性，对(图10·21)的静不定梁的挠度与转角进行了实验测定，(图10·22)示其实验装置的布置图，试验数据与计算结果的比较如(图10·23与10·24)，两者给出了较为吻合的结果。

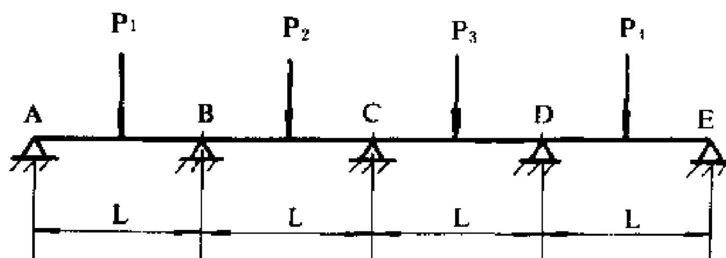


图10·21 高次静不定连续梁

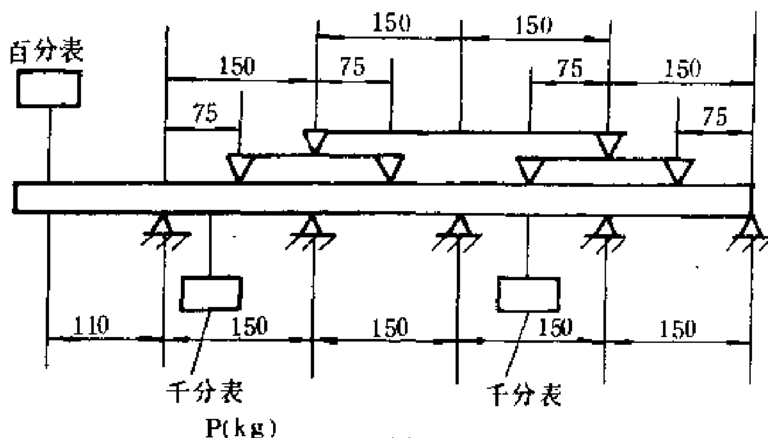


图10·22 高次静不定连续梁

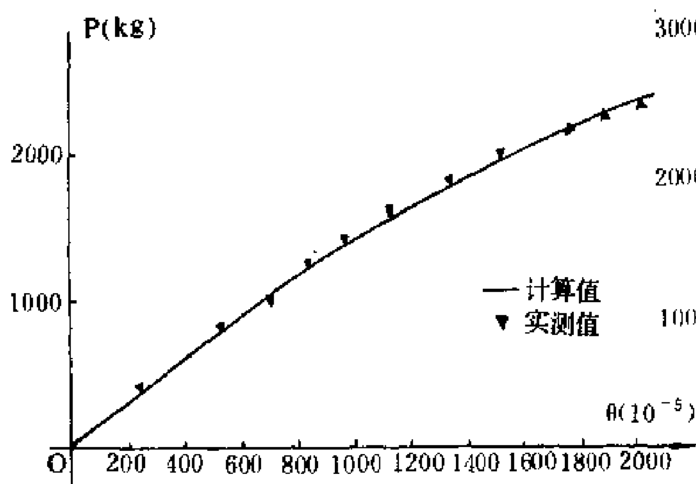


图10·23 外载荷P与C点转角的关系

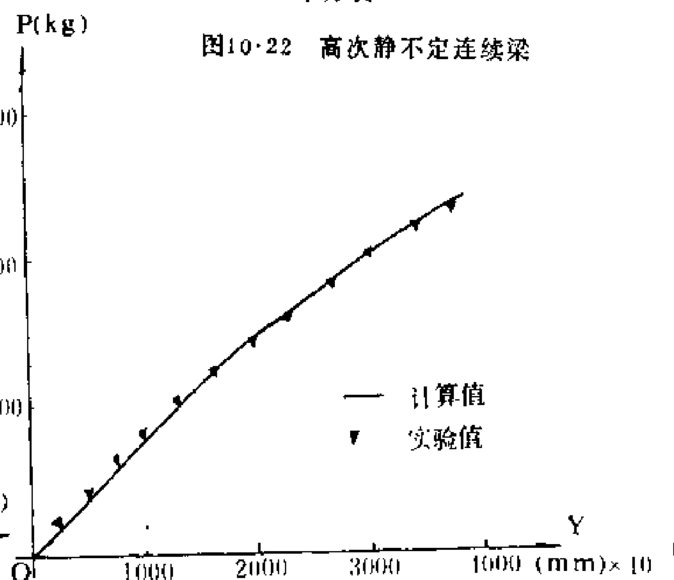


图10·24 外载荷P与A—A截面处挠度的关系

§10·7 含切口板循环弹塑性应变场的有限元内时分析[25]

含切口或裂纹的构件受循环载荷时的弹塑性应变与应力分布，由于与疲劳、断裂等影响构件安全的因素密切相关，因此有着十分重要的实际意义。然而这一问题是有名的难题之一，在经典塑性理论中即使采用有限单元法也难以求得比较合理的解答。在文献中能看到的计算结果很少，且多限于单调加载和在比较粗糙的假设下计算塑性区的增长，很少有人求得随

载荷历史而变化的弹塑性应力应变场的分布，并取得与实验吻合的结果。究其原因在于经典塑性模型在卷入卸载与复杂加载时与实验的结果相差较大；另外，由于引入屈服面使本构关系在应力空间中不连续，这给数值计算带来了困难。例如在有限元计算中，在增量加载使任一单元应力状态超过屈服面后，原则上应回到原状态，调整载荷后再重新加载，以便使应力状态恰好落在屈服面上，这既浪费计算机时间也难确保精度，特别是在循环加载的条件下这些问题显得更加突出。

在本节中我们将简略介绍含对称边缘长切口平板在其自身平面内受循环载荷时的弹塑性内时分析。（图10·25）表示了该平板的受载与几何形状（由于纵横向对称，故仅画了四分之一）。该平板由去氧高导率铜材（$OFHC$铜）加工而成。应用内时理论时遇到的第一个问题就是针对使用的材料确定有关材料性质的参数，一般说内时理论包含两个通用的弹性常数（如E和G或E与ν）和两个材料函数，即核心函数$\rho(Z)$和强化函数$f(\zeta)$。不过实验表明在各向同性单调加载的小变形问题中，起决定作用的是$\rho(Z)$而不是$f(\zeta)$，并且对很多材料如上节的例题表示的那样，通常可假设$f(\zeta)$为1。这里要明确的是，经典模型概念中的强化与内时理论中的强化函数概念并不相同，例如在经典模型中的随动强化指的是屈服面在空间的移动而不改变其大小，这种情况对应着内时理论中强化函数$f(\zeta)$为常数的情况。后者是由核心函数$\rho(Z)$通过式（5·24）中的遗传积分来描述的，这就解释了为什么在原点邻域内$f(\zeta)$为常数时单边应力响应仍可加大的情况。在上节中我们已讨论了确定幂形式的核心函数的问题，我们现在则讨论如何在小塑性变形区段内去确定指数衰减型核心函数的问题。在§10·5中我们已指出当取首项系数α_1足够大时，三个内变量就足以描述在通常感兴趣的变形范围内的弹塑性响应特性，这对应着式（5·41b）中n为3的情况，将其展开可得下述核心函数：

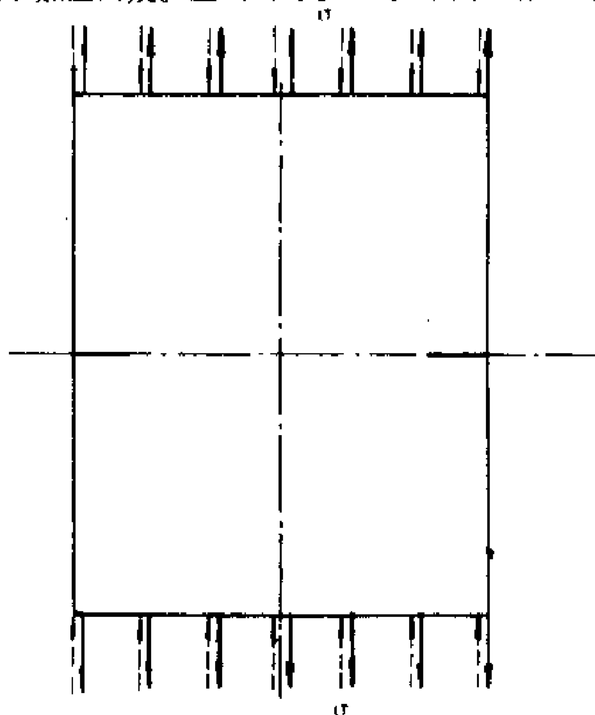


图10·25 切口平板在其自身平面内受循环载荷

$$\rho(Z)=c_1e^{-\alpha_1 Z}+c_2e^{-\alpha_2 Z}+c_3e^{-\alpha_3 Z} \qquad (\alpha_1\text{足够大}) \qquad (7\cdot1)$$

显然重要的是如何根据简单的材料试验去决定式中的系数，现以拉伸试验为例来进行讨论。在$Z<Z^*$的小变形范围内仍采用$f(\zeta)=1$的假定，注意应用式（6·2）、（6·3）和塑性不可压的假设，并将式（7·1）代入（6·1），对单调拉伸的情况容易求得

$$\sigma=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{3}\frac{C_r}{\alpha_r}\left[1-\mathrm{Exp}\left(-\alpha_r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varepsilon^p\right)\right] \qquad (7\cdot2)$$

上式中有六个常数，我们只需在原点邻域内的σ-ε^p曲线上取六个以上的点，原则上就可采用曲线拟合的办法（或发展一种几何作图法）来决定所求的常数。至于循环载荷，即使变形很

小也应在原点邻域外（即$Z>Z^*$）去确定其强（弱）化函数$f(\zeta)$的值，方法是用单轴试件作循环拉压实验，测出其循环回线，利用其应力——塑性应变图上加卸载转折处的特性参数值去确定对应点的$f(\zeta)$值，再拟合成相应的函数形式（参见〔40〕）。对于这里研究的$OFHC$铜板，根据从同一板材中加工的轴向试件的单调与循环加载试验，我们得到

$$C_{1,2,3}=(592,\ 220,\ 46)\ \mathrm{GPA}$$

$$\alpha_{1,2,3}=(27\cdot5,\ 11\cdot5,\ 7\cdot67)\times10^3$$

$$f(\zeta)=1+0\cdot53\zeta^{0\cdot72}$$

为了得到进行计算的控制方程，我们应用虚功原理可得

$$\iiint_V\{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}dV=\{P_{ex}\}^T\delta\{q\} \tag{7·3}$$

式中$\{P_{ex}\}^T$为外力矩阵，$\{q\}$为相应的位移矩阵，故等式右边表示的是外力的虚功。在本节中我们用有限元法来求解问题，故$\{P_{ex}\}^T$与$\{q\}$分别记单元节点外力与节点位移矩阵，而V记单元体积。将新型内时本构方程（5·44）代入上式可得：

$$\iiint_V\{\varepsilon\}^T\{D\}\{\delta\varepsilon\}dV=\{P_{ex}\}^T\{\delta q\}-\iiint_V\{H_p\}^T\{\delta\varepsilon\}dV \tag{7·4}$$

按照有限元常用的插值函数的办法，可用节点位移矩阵来表示应变矩阵，即

$$\{\varepsilon\}=\{B\}\{q\} \tag{7·5}$$

将式（7·5）代入（7·4）中得

$$\{K\}\{q\}=\{P_{ex}\}+\{P_p\} \tag{7·6a}$$

或

$$\{K\}\{\Delta q\}=\{\Delta P_{ex}\}+\{\Delta P_p\} \tag{7·6b}$$

式中

$$\{K\}=\iiint_V\{B\}^T\{D\}\{B\}dV \tag{7·7}$$

而$\{P_p\}$及$\{\Delta P_p\}$为虚塑性力矩阵及其增量，后者可表为

$$\{\Delta P_p\}=-\iiint\{B\}^T\{\Delta H_p\}\Delta V \tag{7·8}$$

对常用的三角形线性插值单元，如设

$$\{q\}^T=\{u_i,\ u_j,\ u_k,\ v_i,\ v_j,\ v_k\} \tag{7·9}$$

则可求得

$$\{K\}=\{B\}^T\{D\}\{B\}t\Delta \tag{7·10}$$

$$(\Delta P_{px})_i=-\frac{t}{2}(\alpha_i\Delta H_{px}+\beta_i\Delta H_{pxy})\qquad i=1,\ 2,\ 3 \tag{7·11}$$

$$(\Delta P_{py})_i=-\frac{t}{2}(\beta_i\Delta H_{py}+\alpha_i\Delta H_{pxy}) \tag{7·12}$$

$$\{B\}=\frac{1}{2\Delta}\begin{Bmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & \beta_1, & \beta_2, & \beta_3\\ \beta_1, & \beta_2 & \beta_3 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{Bmatrix} \tag{7·13}$$

α_i与β_i是由下式表达的节点座标差值

$$\alpha_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \Delta y_{jk}, \quad \beta_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} \Delta x_{jk} \quad (i = 1,2,3) \tag{7·14}$$

式中Δ是单元面积，$\Delta y_{jk} = y_j - y_k$，$\Delta x_{jk} = x_j - x_k$，而 e_{ijk} 是排列记号。为了求得(7.11)和(7·12)中ΔH_{px}与ΔH_{py}等，须求得增量加载过程中的$h_{ij}(Z)$（参见表10-1），它可利用指数型衰减级数的性质，由式（5·33）推出的下述递推公式从（$n-1$）加载步的值去求得n步的$h_{ij}(Z_n)$

$$h_{ij}(Z_n) = \sum_{r=1}^{3} h^r_{ij}(Z_n) \tag{7·15}$$

$$h^r_{ij}(Z_n) \doteq h^r_{ij}(Z_{n-1}) e^{-\alpha_r \Delta Z_n} + \frac{\Delta e^p_{ij}}{\Delta Z_n} C_r (e^{-\alpha_r \Delta Z_n} - 1) \tag{7·16}$$

由以上结果我们容易得到总刚度矩阵，总的节点载荷增量矩阵和虚拟塑性力矩阵，它们构成了一个联立的线性代数方程组。其求解采用的是增量加载迭代法，每一步增量过程中的非线性弹塑性响应是通过迭代式地修正等式右边的塑性虚拟载荷，再解该线性方程组而求得的。具体地说，先在一定的初始虚拟载荷下解该线性方程组，由求得的位移值。应变值及本构方程去求得塑性应变增量及内蕴时间增量，反过来又可得到新的虚拟载荷，代入线性方程求得新的解，直到两相邻迭代步间的控制参量之差值，小到事先规定的许可值时，即可转入下一增量加载步。应该指出的是上述方法与经典塑性理论的初应力算法并无原则上的不同，其区别在于这里不采用屈服面的概念，没有判断单元是否进入屈服或加卸载的附加准则，即由于其加卸载的本构方程都是统一的，单元塑性变形的大小及是否进行加卸载是由作用于该单元的载荷增量及其本构方程计算确定的。另外的一个区别在于各单元的内蕴时间标度的增量ΔZ在计算过程中起着控制性的作用。（图10·2a, b, c）分别表示了所研究的含切口铜板在正值峰载、卸载和负值峰载时的实测应变与计算应变的比较。（图10·27）则给出了平面应

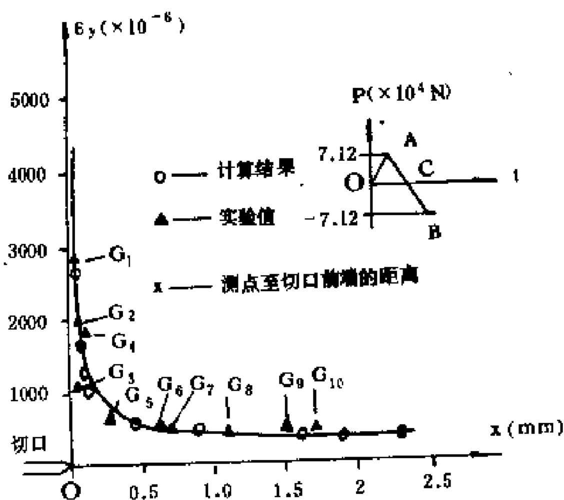


图10·26(a) 正峰值载荷A时沿切口线$\overline{OO'}$应变ε_y的分布

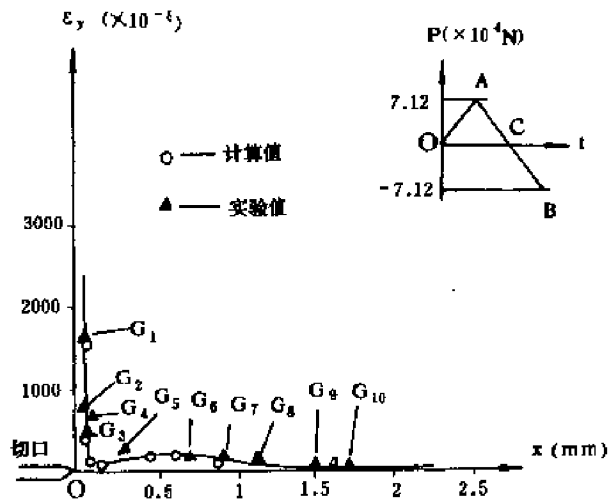
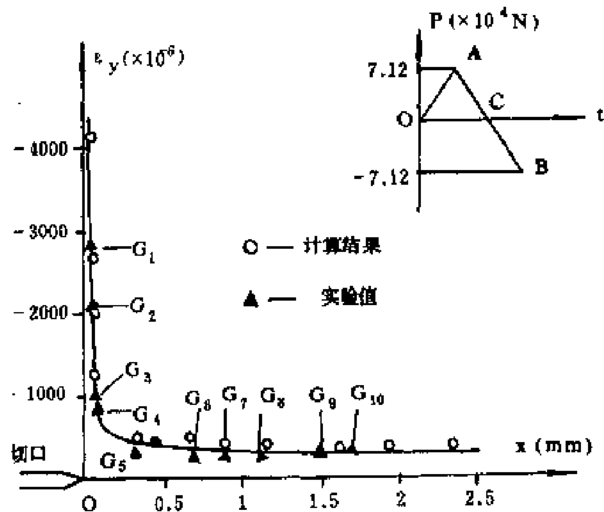


图10·26(b) 残余应变ε_y沿切口线$\overline{OO'}$的分布

力情况下靠近切口前沿处某点A处的循环应力σ_y与应变ε_y的关系曲线，这表明在切口（或裂纹）前沿处的塑性应变将因循环的进行而不断积累，这一切口前缘处棘轮效应的预言已经得到了实验的证实。（图10·28）表明了残余应力沿切口中心联线分布随循环变化的情况，对于研究交变载荷下残余应力的变化也是很有意义的*。



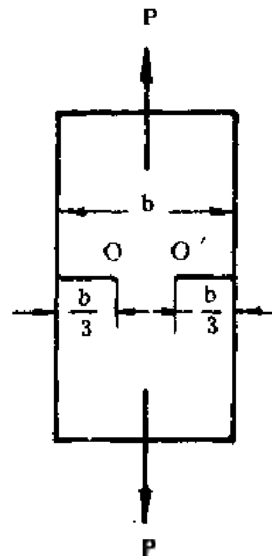


图10·26(c) 负峰值载荷B时沿切口线$\overline{OO'}$应变ε_y的分布　　图10·26(d) 试件图

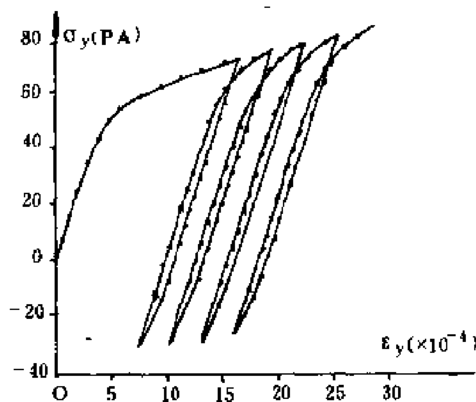


图10·27 切口前缘处棘轮效应的预言

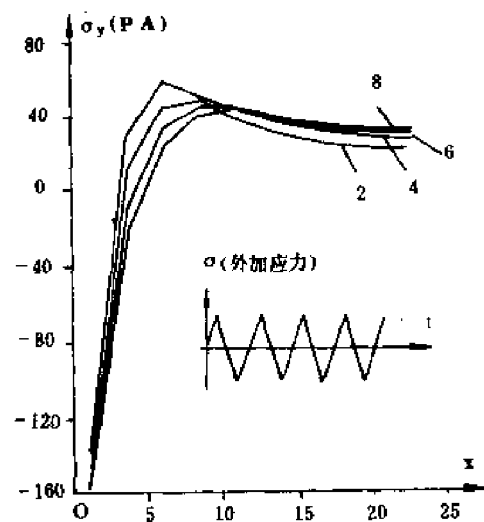


图10·28 残余应力σ_y随循环变化及其分布的情况

§10·8 固支薄圆板弹塑性弯曲的一种弹塑性分析[41]

下面我们从新型内时弹塑性本构方程出发，用含待定常数的半解析方法，来分析周边固支的圆板在均布载荷和集中载荷作用下的弹塑性小挠度弯曲。

*不采用屈服面的内时弹塑性有限元初应力算法目前已得到很大的改进，提高了精度与收敛速度；同时发展了内时弹塑性切线刚度有限元算法，并已成功地应用于有限变形弹塑性分析中，参见范镜泓、彭向和和张俊乾之论文“内时弹塑性分析的一种新算法及其实验验证”，“内时理论的初应力算法及其在复合材料中的应用”（全国计算力学会议，1986，上海）

在小挠度薄板理论中，通常假设垂直于板面的z轴方向上无挤压应力的存在，且忽略该方向上剪应力之影响，于是有

$$\sigma_Z=0,\quad \tau_{xZ}=0,\quad \tau_{yZ}=0$$

在上述条件下板内厚度为dz的每一薄层系处于平面应力状态中，因此可采用本构方程(5·44)和表10-1，不同的是要用r、θ代替x、y，由于对称性，我们还有$d\sigma_{r\theta}=0$，$dh_{r\theta}=0$，$dH_{r\theta}=0$，写出来就是下面的一些表达式

$$\{d\sigma\}=\{D\}\{d\varepsilon\}+\{dH\}$$

$$\{d\sigma\}=(d\sigma_r\quad d\sigma_\theta)^T,\quad \{d\varepsilon\}=(d\varepsilon_r\quad d\varepsilon_\theta)^T \tag{8·1a,b}$$

$$\{dH\}=\{dH_{pr}\quad dH_{p\theta}\}^T \tag{8·2}$$

并由表10-1查得：

$$dH_{pr}=\{\mu_p h_r(Z)-D_1 h_Z(Z)\}\,dZ/\rho(0) \tag{8·3}$$

$$dH_{p\theta}=\{\mu_p h_\theta(Z)-D_1 h_Z(Z)\}\,dZ/\rho(0) \tag{8·4}$$

$$C_1=\frac{12K\mu_p+4\mu_p^2}{3K+4\mu_p},\qquad C_2=\frac{6K\mu_p-4\mu_p^2}{3K+4\mu_p} \tag{8·5a,b}$$

本问题求解时，我们不采用有限元法，而采用半解析算法，对含均布载荷的半径为a的圆板，设挠度函数具有下述形式

$$W=C_1(1-r^2/a^2)^2+C_2(1-r^2/a^2)^3 \tag{8·6}$$

由于座标原点选在板的中心，显然该式是满足固支板的下述边界条件的，即

$$r=a,\quad W=0,\quad dW/dr=0 \tag{8·7}$$

式中C_1与C_2是待求的常数。在增量加载时式(8·6)可改写成下述矩阵形式

$$\Delta W=[N][\Delta C] \tag{8·8}$$

式中

$$[N]=[(1-r^2/a^2)^2,\quad (1-r^2/a^2)^3],\quad [\Delta C]=\begin{bmatrix}\Delta C_1\\ \Delta C_2\end{bmatrix} \tag{8·9a,b}$$

根据板的理论有

$$\varepsilon_r=-\frac{d^2W}{dr^2}z,\qquad \varepsilon_\theta=-\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}z \tag{8·10a,b}$$

将式(8·8)代入上式得

$$\{\Delta\varepsilon\}=[B]\{\Delta C\} \tag{8·11}$$

式中

$$\{\Delta\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_r\\ \Delta\varepsilon_\theta\end{Bmatrix} \tag{8·12}$$

$$[B]=z\begin{pmatrix}\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{12r^2}{a^4} & \dfrac{6}{a^2}\left[\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)^2-\dfrac{4r^2}{a^2}\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)\right]\\[2ex] \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{4r^2}{a^4} & \dfrac{6}{a^2}\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)^2\end{pmatrix} \tag{8·13}$$

仿照上节推导基本方程的思路，由虚位移原理表达式(7·3)及本构方程(5·44)可得

$$[K]\{\Delta C\}=\{\Delta P_{ex}\}+\{\Delta P_p\} \tag{8·14}$$

式中
$$[K]=2\pi\iint_S [B]^T[D][B]rdrdz \tag{8·15}$$

$$\{\Delta P_p\}=-2\pi\iint_S [B]^T\{dH_p\}rdrdz \tag{8·16}$$

S为从中心发出的射线截面组成的域，其面积为板厚 t 与半径 a 之积，在板为均布载荷下的情况

$$\{\Delta P_{ex}\}=2\pi\int_0^a [N]^T\{\Delta P\}rdr \tag{8·17}$$

式（8·14）只包含两个联立的线性代数方程，它是很好解的。问题仍然集中在计算 $\{\Delta P_p\}$ 上，为此首先计算ΔH_p，它可采用递推公式｛7·15｝、（7·16｝去求得 $h_{ij}(z)$，在按(6·2)与式(6·3)求内蕴时间标度的增量ΔZ时，仍采用强化函数$f(\zeta)=1$，并假设材料塑性不可压，则有

$$\Delta\varepsilon_r^p=\Delta\varepsilon_r-\Delta\varepsilon_r^e=\Delta\varepsilon_r-\frac{1}{E}(\Delta\sigma_r-\nu\Delta\sigma_\theta)$$

$$\Delta\varepsilon_\theta^p=\Delta\varepsilon_\theta-\Delta\varepsilon_\theta^e=\Delta\varepsilon_\theta-\frac{1}{E}(\Delta\sigma_\theta-\nu\Delta\sigma_r) \tag{8·18}$$

式（8·18）进行积分时，须采用高斯积分的办法，在每次增量加载步中，仍采用迭代方法，以不断修改虚拟载荷，直到两次迭代间ΔC值的差小于规定的误差才转入下一个增量步。(图10·29)表示了在均布载荷时圆板中点挠度的弹性解与上述内时分析所得结果的比较，结果表明在载荷较小时两者是吻合的，在载荷较大时该板的弹塑性挠度将大于弹性计算的结果。对受集中载荷作用于圆板中点的情况，其函数可仿照〔42〕取为

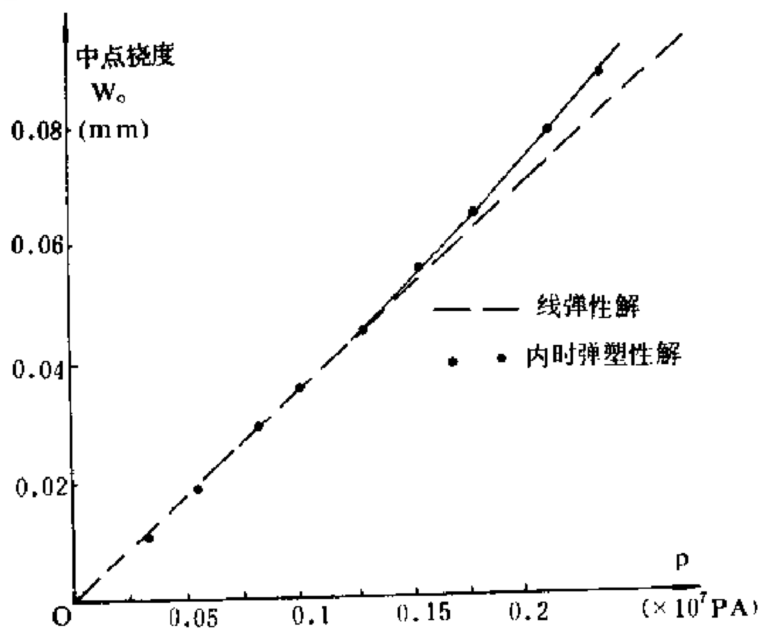


图10·29 圆板在均布载荷作用下弹塑性弯曲时的中心点挠度

$$W=C_1[1-r^2/a^2+(2r^2/a^2)ln(r/a)] \tag{8·19}$$

显然它是满足边界条件要求的。

§10·9 内时理论在断裂与低周疲劳分析中之应用〔43〕

断裂力学近年来发展缓慢及疲劳研究缺乏坚实理论基础的现状，迫切希望引入新的塑性本构理论及损伤理论来研究弹塑性断裂与低周疲劳的机理，例如找出一个恰当的准则，以便搞清并计算出它们的路径依赖性质，而这些是难以用诸如K判据，J判据及累积损伤理论来加以说明的。前已述及在内时理论中内蕴时间标度Z是紧密地与塑性变形程度及材料的性质变化紧密相连的，因而可以合理地想像当Z达到某一临界值Z_C时，微系统ω_x将出现破坏。

重要的是这里的Z_C与强度极限σ_b及J_{1C}等在概念上是完全不同的，后者是材料的某种常数，而Z_C并不是，它与内蕴时间Z一样都是路径相关的。那么什么是确定临界内蕴时间Z_C的准则呢？它是由Valanis提出的一个能量或然率断裂准则来决定的。其基本概念是断裂具有某种随机的性质，在不同的变形阶段它都存在一定的几率，只有变形的发展和材料性质的变化（对应着内蕴时间标度Z的增加）使其累计的几率达到100%时，断裂才决定性地发生。下面就是Valanis提出的断裂准则之一[44]。断裂准则：如果材料微元的内蕴时间Z达到了由下述方程给出的临界值Z_C，则该微元将出现断裂

$$\int_0^{Z_c}\left\{1-\exp\left(-\frac{\gamma}{K\theta}\langle\Delta\varepsilon-\varepsilon_0\rangle\right)\right\}dZ=1 \tag{9·1a}$$

$$\langle\Delta\varepsilon-\varepsilon_0\rangle=0\ ,\quad \Delta\varepsilon\leqslant\varepsilon_0 \tag{9·1b}$$

$$\langle\Delta\varepsilon-\varepsilon_0\rangle=\Delta\varepsilon-\varepsilon_0,\ \Delta\varepsilon>\varepsilon_0 \tag{9·1c}$$

式中$\Delta\varepsilon$是微元相对无应力状态时的能量变化，ε_0是相应于断裂门槛值的能量，γ——材料参数，θ——绝对温度，K——波尔兹曼常数。上式中大括号内的项表示在dZ区段内材料断裂的或然率，所附加的$\langle\Delta\varepsilon-\varepsilon_0\rangle$的条件表明当能量变化小于门槛值时破坏的或然率是为零的。式（9·1）中的能量ε是直接决定微元损伤破裂或然率的能量，显然它不应是耗散了的能量密度，而应是Helmholtz自由能，在等温状态下它就是应变能密度，这就把人们熟知的应变能密度在断裂过程中的重要作用通过一个路径相关的积分中的影响反应了进来。

下面我们将着重用上述断裂准则来研究低周疲劳的现象，在此条件下门槛值起的作用相对说很小，可近似取为零。如记自由能相对于无应力状态时的改变量为ψ，则我们得到了下述的断裂准则

$$\int_0^{Z_c}\left\{1-\exp\left(-\frac{\gamma}{K\theta}\psi\right)\right\}dZ=1 \tag{9·2}$$

将上式中的指数函数展开，则可得到下述近似表达式

$$C\int_0^{Z_c}\psi^n dZ=1 \tag{9·3}$$

其中C与n是材料参数$\gamma/K\theta$的函数，如果该参数很小，则$C=\gamma/K\theta$且$n=1$；而如果该参数很大，则$C=1$，$n=0$。

一大类金属材料的循环响应特征是，经过一个较短的过渡过程后进入稳定状态。利用稳态循环时材料不再强（弱）化的特点，可取材料强化函数为常数，记为f_0。另外若以稳定循环开始时加卸载的转折点作为内蕴时间标度x计算的新的原点，即可以证明[45]

$$S_{ij}=\int_0^{X_c}\rho_c(x-x')\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial x'}dx' \tag{9·4}$$

式中ρ_c为以新的原点记的核心函数，它与原有的核心函散$\rho(x)$之间的关系为

$$\rho_c(x)=2\{\rho(x)-\rho(x+2\Delta_p)+\rho(x+4\Delta_p)+\cdots\cdots\} \tag{9·5}$$

对一般的材料$\rho(x)$是一个在原点处接近无穷大且衰减极快的函数，因而可近似认为

$$\begin{aligned}&\rho(2\Delta_p)\sim 0\\&\rho_c(x)\sim 2\rho(x)\end{aligned} \tag{9·6}$$

若取式（6·4）为核心函数，则稳定循环时的本构关系可近似取为

$$S_{ij}=\int_0^{X_c}\frac{2\rho_0}{(x-x')^{\alpha}}\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x'}dx' \tag{9·7}$$

由此式及式(6·2)与(6·3)易于得到拉伸、剪切及其比例耦合时塑性应变与应力之关系式：
纯剪：

$$\tau=\frac{2\rho_0}{\beta}f_0^{\alpha}\varepsilon_{12p}^{\beta}2^{\frac{\beta-1}{2}} \tag{9·8}$$

拉压：

$$\sigma=\frac{3\rho_0}{\beta}f_0^{\alpha}\varepsilon_p^{\beta}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\beta+1}{2}} \tag{9·9}$$

(压缩时σ与ε_p取绝对值)
拉压、剪切比例耦合

$$\sigma=\frac{2\rho_0 f_0^{\alpha}}{\beta}\left(\frac{\sqrt{2+1.5K^2}}{K}\right)^{\beta-1}\varepsilon_p^{\beta} \tag{9·10}$$

$$\tau=\frac{2\rho_0 f_0^{\alpha}}{\beta}(2+1.5K^2)^{\frac{\beta-1}{2}}\varepsilon_{12p}^{\beta} \tag{9·11}$$

式中$\beta=1-\alpha$，$K=\varepsilon_p/\varepsilon_{12p}$，而$\varepsilon_p$与$\varepsilon_{12p}$分别为拉伸及剪切塑性应变张量分量。这里为求得解析公式起见，K被假定为常数，即所谓比例耦合。应该指出对一般的应变耦合方式和过程，都不难用式(9·7)求得循环应力响应的数值解。

若忽略较短的不稳定循环对疲劳寿命的贡献，并设循环破坏次数为N_C，每一转折段中内时标量增量为ΔZ，则由于在每一对称应变循环中，有两个转折段，其贡献是一样的，故由式(9·3)有

$$2N_C C\int_0^{\Delta Z}\psi^n dZ=1 \tag{9·12}$$

下面我们在等温情况下来讨论拉压对称塑性疲劳的寿命计算公式，此时自由能密度ψ近似是拉压时的弹性能密度(由于位错等贮存的应变能相对说很小，可以忽略)

$$\psi=\sigma^2/2E \tag{9·13}$$

利用(6·2)、(6·3)、(9·9)、(9·12)、(91·3)容易求得下述疲劳寿命的近似计算公式

$$N_C(\varepsilon_p^{max})^{(1+2n\beta)}=C_0 \tag{9·14}$$

式中
$$C_0=\frac{(1+2n\beta)f_0^{(1-2\alpha n)}\beta^{2n}E^nC^{-1}\rho_0^{-2n}}{3^{\frac{1}{2}+(1+\beta)n}\cdot 2^{(3/2+n\beta)n}} \tag{9·15}$$

式(9·14)可以化为

$$N_C^{\frac{1}{1+2n\beta}} \varepsilon_p^{max} = C_0^{\frac{1}{1+2n\beta}} \tag{9·16}$$

上式就是著名的Coffin-Manson公式，它原是由大量试验结果总结出来的经验公式，这里是从内时本构理论及能量或然率断裂理论推导出来的。在参考文献〔43〕中还讨论了剪切对称应变疲劳，拉压与剪切耦合对称应变疲劳，以及对称疲劳与蠕变交互作用时的计算公式，并给出了低周疲劳寿命路径相关的一种分析，解释了在起点与终点应变状态相同的情况下，为什么先拉后扭再逆序返回的疲劳寿命小于先扭后拉再逆序返回的寿命，有兴趣的读者可参阅该文献。

§10·10 超高压自增强厚壁圆筒残余应力场的内时弹塑性分析〔46〕

自增强厚壁筒在国防、化工和机械工程中有着重要的应用价值，其残余应力的分析一直受到工程界的重视，并提出过多种计算方法。然而实验结果与理论计算的差别还是很大的，有关报告指出卸载时计算的残余应变要比实测值大得多，设计时不得不乘上一个（0.4～0.5）的折减系数〔47〕。在文献〔46〕进行的内时分析中采用了无屈服面的切线刚度法，它比较适合于变形较大的情况。从新型的内时本构方程（5·44）出发，经过一些数学上的处理，我们容易得到下述适用于切线刚度法的本构方程

$$\{\Delta\sigma\} = [D_{ep}]\{\Delta\varepsilon\} \tag{10·1}$$

式中

$$[D_{ep}] = ([I]+[D_1])^{-1}([D_e]+[D_2]) \tag{10·2}$$

上式是一三维本构方程，在轴对称问题中，各矩阵可具体写为

$$\{\Delta\sigma\} = (\Delta\sigma_r,\ \Delta\sigma_\theta,\ \Delta\sigma_z,\ \Delta\sigma_{rz})^T \tag{10·3}$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = (\Delta\varepsilon_r,\ \Delta\varepsilon_\theta,\ \Delta\varepsilon_z,\ \Delta\varepsilon_{rz})^T \tag{10·4}$$

$$[D_e] = \begin{bmatrix} K+\frac{4}{3}\mu_p & K-\frac{2}{3}\mu_p & K-\frac{2}{3}\mu_p & 0 \\ \text{对} & K+\frac{4}{3}\mu_p & K-\frac{2}{3}\mu_p & 0 \\ & \text{称} & K+\frac{4}{3}\mu_p & 0 \\ & & & \end{bmatrix} \tag{10·5}$$

$$[D_1] = \frac{1}{2\mu_0 f^2\Delta Z}\begin{bmatrix} h_r\Delta e_r^p & h_r\Delta e_\theta^p & h_r\Delta e_Z^p & h_r\Delta\gamma_{rZ}^p \\ h_\theta\Delta e_r^p & h_\theta\Delta e_\theta^p & h_\theta\Delta e_Z^p & h_\theta\Delta\gamma_{rZ}^p \\ h_Z\Delta e_r^p & h_Z\Delta e_\theta^p & h_Z\Delta e_Z^p & h_Z\Delta\gamma_{rZ}^p \\ h_{rZ}\Delta e_r^p & h_{rZ}\Delta e_\theta^p & h_{rZ}\Delta e_Z^p & h_{rZ}\Delta\gamma_{rZ}^p \end{bmatrix} \tag{10·6}$$

$$
[D_2] = \frac{1}{f^2 \Delta Z} \begin{Bmatrix} h_r \Delta e_r^p & h_r \Delta e_\theta^p & h_r \Delta e_Z^p & \frac{1}{2} h_r \Delta \gamma_{rZ}^p \\ h_\theta \Delta e_r^p & h_\theta \Delta e_\theta^p & h_\theta \Delta e_Z^p & \frac{1}{2} h_\theta \Delta \gamma_{rZ}^p \\ h_Z \Delta e_r^p & h_Z \Delta e_\theta^p & h_Z \Delta e_Z^p & \frac{1}{2} h_Z \Delta \gamma_{rZ}^p \\ h_{rZ} \Delta e_r^p & h_{rZ} \Delta e_\theta^p & h_{rZ} \Delta e_Z^p & \frac{1}{2} h_{rZ} \Delta \gamma_{rZ}^p \end{Bmatrix} \quad (10\cdot7)
$$

上列式中的 h_r 等分量可由递推公式（7·15）与（7·16）在增量加载过程中确定，利用递推原理可得下述基本方程

$$
[K]_n^{i-1}\{\Delta u\}_n^i = \{\Delta P\}_n \quad (10\cdot8)
$$

式中

$$
[K]_n^{i-1} = \int_V [B]^T [D_{ep}]_n^{i-1} [B] dV \quad (10\cdot9)
$$

$$
\{\Delta P\}_n = \{P\}_n - \int_V [B]^T \{\sigma\}_{n-1} dV \quad (10\cdot10)
$$

式中 $[B]$ 为应变矩阵，n 表示第 n 次加载，而上标 i 表示第 i 次迭代。方程（10·10）考虑了在增量加载中由计算误差带来的节点不平衡力。根据上述基本方程，不难发展一种无屈服面的切线刚度有限元算法。采用该算法对〔47〕中采用的35CrNi3MoV超高压厚壁圆筒（外径55毫米，内径22毫米），内压7245大气压的残余应力分布进行了计算，在（图10·30）中将该结果与〔47〕中用Sachs镗孔法所得实验结果及根据Bland理论计算所得的结果进行了比较，比较结果表明内时分析得到了与实际较为吻合的结果*。

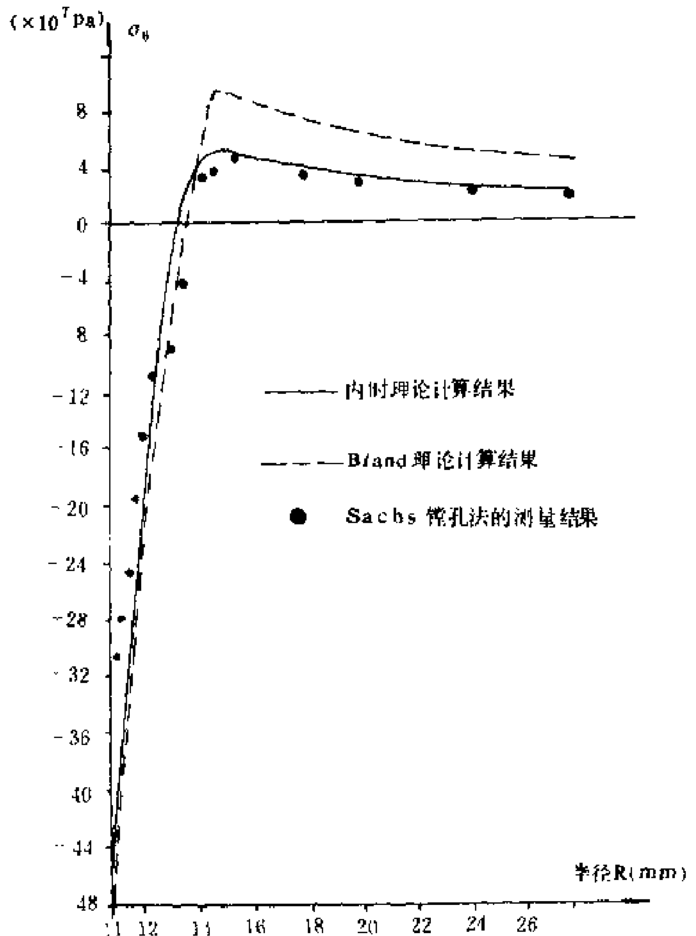


图10·30　超高压厚壁圆筒残余应力 σ_θ 的分布

外径：55mm，内径：22mm，内压：7245atm

材料：35CrNi3Mo

§10·11　砂土的内时本构描述

由于混凝土及工程类地质材料在土建与水工结构等工程中的巨大意义，以及有关它们的应力应变关系至今仍了解得很不够，近些年来人们对这类材料本

*在获得了一封闭解后，计算了上千次脉动循环中残余应力随循环数松驰情况，详见钱正芳与范镜泓的工作“内蕴时间塑性理论在自增强厚壁筒应力计算中的应用”（第一届全国塑性力学会议，1986，杭州）

构理论的研究越来越重视。但是由于岩土与混凝土等材料的特性远较金属复杂，而研究的思想又多半受到有关金属的塑性模型的束缚，其进展是不能使人满意的。既然内时理论的基础较深广、观点较高，又特别重视具体材料在特定条件下的响应特性，因而人们有理由期望它将在这一领域中发挥更大的作用。下面我们将以无粘土壤——砂土为例来讨论与介绍有关这类材料的本构描述。在讨论中我们将把概念提升到耗散型材料本构形式不变性定律的高度上来，注意广义内摩擦力概念在决定不同类型的内时标度中的应用，但说明概念时的有关公式等则大都取自吴汉津（H.C.Wu）的论文〔48〕，部分也取自〔35〕。

Ⅰ. **砂土的物性及Gibbs自由能分析系统**

应该指出的是，过去对无粘土壤的研究，或者与真实材料的特性相差较远，致使计算结果经常无用，或者带有纯经验的性质，使应用范围狭窄，盲目性很大，且每次条件改变又不得不重新建立模型和进行试验，造成了较大的浪费。我们的目的既然是发展一种与连续介质力学的基本定律相吻合，且能描述无粘土壤复杂力学特性的本构关系，就不能不充分认真注意下述实验事实，并以此作为我们研究的出发点：①砂土的体积变化由两种主要因素组成，一是静水压力所致的压实（Consolidation），它一般是非线性的，另一是由偏斜应力引起的密实（Densification）或膨胀（常称剪胀效应），这两种因素合在一起造成了体积应力应变曲线向应力轴弯曲的形状；②偏斜应力响应曲线虽然与普通材料的形态一样是弯向应变轴的，但它受围压的影响很大，在无围压并忽略重力时，干砂是无剪切抗力的；③空隙比对力学特性的影响很大，造成密实砂粒与松散砂粒间应力响应特性的重大差别；④砂土在振动情况下将出现液化现象（Liquification），即在地震波等的影响下砂土失去内摩擦力像液体一样流动。尽管有关的工作已经证明内时理论能用统一的观点和公式来较好地描述密实砂与松散砂的响应特性，但由于篇幅的限制并为使叙述简明起见，下面的叙述是将空隙度固定起来讨论问题的，相应的材料函数也是与之对应的，这样以空隙度作为参数得到的结果，从工程角度来看也不失为考虑空隙度影响的一种方法，至于液化的问题我们这里不予涉及。此外在理论体系的建立上我们将不采用以前那种从Helmholtz自由能ψ出发的分析系统，而采用从Gibbs自由能φ出发的分析系统。这两种分析系统在内变量的含义上是一致的，即仍具有表征材料内部组织结构的物理内涵（例如土粒的排列及其变化），但自由能的表达则是不同的。Helmholtz自由能ψ的描述是以应变与温度作为外变量的，我们有

$$\psi=\varepsilon-\theta\eta=\psi(\varepsilon_{ij},\ \theta,\ q_\alpha)\qquad \alpha=1,2,\cdots m \tag{11·1}$$

而Gibbs自由能的描述则是以应力与温度作为外变量的，即

$$\varphi=\psi-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\varphi(\sigma_{ij},\theta,q_\alpha)\qquad \alpha=1,2,\cdots m \tag{11·2}$$

这两种描述在蜕化的情况下就回到了大家熟悉的势能与余能体系对应的描述。在建立本构方程时代替下式

$$\sigma_{ij}=\partial\psi/\partial\varepsilon_{ij} \tag{11·3}$$

采用的是下述关系〔33〕

$$\varepsilon_{ij}=-\partial\varphi/\partial\sigma_{ij} \tag{11·4}$$

采用后一种描述的目的，除了使读者了解另一种分析体系以外，也是由于后者是以应力作为独立变量的，这样对岩土性质有重要影响的水压应力σ_{KK}与偏应力S_{ij}就可以分开来加以研究，并用应力控制下的实验来分离有关因素并确定相应的材料参数。

Ⅱ. 不同机制下内变量与内蕴时间标度的选择

根据耗散型材料本构形式不变性定律，我们可以按照不同性质的砂土力学特性，选择三类描述其内部组织结构及其变化对宏观本构关系影响的内变量 q^h_{KK}， q^d_{KK}和 p^s，并定义与之相关的三个内蕴时间标度Z_h、Z_d与Z_s，具体地说：

1．S个内变化量 p^s_{ij}及其相应的内蕴时间Z_s。它们用来描述与偏斜应力响应相对应的不可逆变化，这种变化与金属剪切滑移的最大区别在于它是受围压影响的（注：我们在这里，把围压σ_r定义成绝对值最小的主压应力，即$\sigma_r = -\sigma_i, \min$, $\sigma_i < 0$）这样做是将它的影响与体积应力 $\sigma\ (= -\frac{1}{3}\sigma_{KK})$ 的影响区别开来）。其物理机制可以设想如下：在无围压并忽略重力时，干砂是离散质点的一种堆积，是无剪切抗力的；围压的作用使砂粒互相接触形成了摩擦力，这种广义摩擦力的大小取决于砂粒质点间的压力、接触质点数目及这些接触面的性质，它象金属一样也与累计的不可逆应变有关，即依赖于下式表达的内蕴时间量度

$$d\zeta_s = ||de^I_{ij}|| \tag{11·5}$$

（注：这里的上标 I 表示不可逆非弹性应变，用它来代替式（6·3）中表示塑性应变的上标“p”）；除此之外，它还应是围压σ_r的函数。这也就是说与这种广义内摩擦力相关的内蕴时间标度Z_s的定义还应与σ_r有关，即应具有下述形式

$$dZ_s = \frac{d\zeta_s}{f(\zeta_s,\ \sigma_r)} \tag{11·6}$$

作为一种简化的情况，可取下述线性形式〔21〕、〔48〕

$$f(\zeta_s, \sigma_r) = 1 + \beta_1(\sigma_r)\zeta_s \tag{11·7}$$

$\beta_1(\sigma_r)$可由实验曲线确定，也有可能从砂土的细观理论建立一种模型，用以考虑具有不同粒度的砂粒间的平均摩擦系数，从而给出$\beta(\sigma_r)$的解析形式。

2． d个内变量 q^d_{KK} 及相应的内蕴时间Z_d。它们用来描述偏斜应力S_{ij}在砂土密实的变形机制中所起的作用。在偏应力S_{ij}作用下，砂粒发生了相互滑移、翻越和穿插，这种由内变量q^d_{KK}描述的颗粒的重排列，造成了体积的增大或减小（剪胀或剪缩），这种效应可称为应变耦合效应以与上面谈到的围压对偏应力影响的所谓应力耦合效应区别开来。由于内变量q^d_{KK}对应的变化是不可逆的，因而对应着其耗散能量的广义摩擦力也应由其相应的内蕴时间Z_d加以描述。在Z_d的定义中首先我们应当注意到下述实验事实，即甚至在剪变形很小和剪切卸载时仍然存在砂土的密实化现象，因而不能采用不可逆应变 e^I_{ij}来定义内蕴时间，而应回到Valanis 1971年给出的内蕴时间量度的定义〔21〕，即

$$d\zeta_d^2 = K^d_{ijkl}de_{ij}de_{kl} \tag{11·8}$$

式中K^D_{ijkl}为四阶正定的材料张量，在一维情况下上式可简化成

$$d\zeta_d = K_d|de| \tag{11·9}$$

容易想像其相应的广义内摩擦力将取决于围压σ_r的大小且存在着不可逆变形的累积效应。前者意味着K_{ijkl}或K_d应该是围压σ_r的函数，即在同样的砂土情况下，σ_r改变了砂土的基本结构特征或物态；后者意味着砂土广义摩擦力随过程的变化应表成内蕴时间量度ζ_d的函数，即有

$$K^{(d)}_{ijkl}=K^{(d)}_{ijkl}(\sigma_r) \qquad 或K_d=K_d(\sigma_r) \tag{11·10}$$

及

$$dZ_d=\frac{d\zeta_d}{g(\zeta_d)} \tag{11·11}$$

$g(\zeta_d)$可根据有关实验加以确定，在参考文献[48]中采用了下述线性化的形式

$$g(\zeta_d)=1+\beta_2\zeta_d \tag{11·12}$$

式中β_2是一常数。

3. h个内变量q^h_{KK}及相应的内蕴时间Z_h。它们用来描述静水压力在砂土各向同性压实的变形机制中所起的作用。其内蕴时间量度ζ_h描述着累计的不可逆的体积变形，可仿照(5·6)并取$k_0=1$，将其定义为

$$d\zeta_h=|d\theta^h|=|d\zeta^h_{KK}-\frac{d\sigma}{K_0}| \tag{11·13}$$

式中θ^h是水压体积应变ε^h_{KK}的非弹性部分，在这里体积卸载曲线被假定是体积弹性模量为常数K的直线(否则的话k_0可不取为1)。为了计及水压体积响应中的应变强化，注意到水压造成的砂土结构特征或物态的变化也具有累积效应，且是路径相关的，因而与这类广义摩擦力相联的内蕴时间应是ζ_h的函数，于是得到

$$dZ_h=d\zeta_h/h(\zeta_h) \tag{11·14}$$

作为近似表达式，在[48]中$h(\zeta_h)$取为下述形式

$$(h\zeta_h)=(\sigma_f K-\zeta_h)^{-1} \tag{11·15}$$

式中σ_f为由实验决定的常数。

Ⅲ. Gibbs自由能表达式及内变量的演化方程

根据上面对三种不可逆变形机制的分析，我们可将Gibbs自由能表达式(11·2)近似地分成两部分，在等温情况下，它们是：

$$\phi(\sigma_i{}^j,\ q^r_{ij})=\phi_H(\sigma,q^h,q^d)+\phi_D(\sigma^0,S_{ij},p^S_{ij}) \tag{11·16}$$

式中$\sigma=\frac{1}{3}\sigma_{KK}$，$q^h=\frac{1}{3}q^h_{KK}$，$q^d=\frac{1}{3}q^d_{KK}$，下标$H$和$D$分别记水压与偏斜部分，$\sigma^0$是任一偏应力施加前的水压应力，它在$\phi_D$中作为一个参数而存在，与围压$\sigma_r$紧密相关。从形式上看$\phi_H$与$\phi_D$是分离的，但由于在$\phi_H$中$q^d$的存在就意味着它包含了偏斜应力对体积膨胀的影响，反过来ϕ_D中σ^0的存在就包含着围压对偏斜应力的影响。仿照式(4·5)的指导思想，将式(11·16)展开为齐二次Taylor级数可得

$$\phi_H=-\frac{1}{2}A\sigma^2-\sum_h B^hq^h\sigma+\frac{1}{2}\sum_h M^hq^hq^h-\sum_d C^dq^d\sigma$$
$$+\frac{1}{2}\sum_d D^dq^dq^d \tag{11·17}$$

$$\phi_D=-\frac{1}{2}E_{ijkl}S_{ij}S_{kl}-\sum_S F_{ijkl}S_{ij}\,p^S_{kl}+\frac{1}{2}\sum_S G^S_{ijkl}p^S_{ij}p^S_{kl} \tag{11·18}$$

其中A、B^h、M^h、C^h和D^d是正的材料常数；E_{ijkl}，F_{ijkl}和G^S_{ijkl}是四阶材料张量，它们依赖于σ^0以计入砂的剪切响应的压力依赖以及零围压时砂不具有任何剪切抗力的特性。忆及四阶各向同性张量作用于对称张量前的下述展开形式[21]

$$L_{ijkl}=L_1\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2}L_2(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (11\cdot19)$$

式中L_1与L_2是常数，而δ_{ij}是Kronecker符号；并将式（11·16）、（11·17）和（11·18）代入（11·2）可以写出无粘砂的下述方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{3}(A\sigma+\sum_h B^h q^h+\sum_d C^d q^d)\delta_{ij}+E_2 S_{ij}+\sum_S F_2^S p_{ij}^S \qquad (11\cdot20)$$

或者等价地可分成下述两个方程：

$$\varepsilon_{KK}=\varepsilon^h_{KK}+\varepsilon^d_{KK} \qquad (11\cdot21)$$

式中

$$\varepsilon^h_{KK}=A\sigma+\sum_h B^h q^h \qquad \varepsilon^d_{KK}=\sum_d C^d q^d \qquad (11\cdot22a)$$

$$e_{ij}=E_2 S_{ij}+\sum_S F_2^S p_{ij}^S \qquad (11\cdot22b)$$

值得注意的是ε_{KK}由两部分组成，第一部分表示由各向同性压实造成的体积应变ε^h_{KK}，而第二部分表示由于偏斜应力而造成的密实应变ε^d_{KK}。

Ⅳ. 本构方程的显式

为了最终求得本构方程的显式，必须分别三类不同的耗散机制，研究其相应的内变量演变方程。可以合理地认为对应于偏斜机制的广义内摩擦力（$-\frac{\partial\phi_D}{\partial p^S_{ij}}$）及对应于密实机制的广义摩擦力（$-\frac{\partial\phi_H}{\partial q^d}$）都是与其相应内变量变化率成比例的函数，于是仿照式（4·4）与（4·5）的推导，我们得到

$$\frac{\partial\phi_D}{\partial p^S_{ij}}+b_2^S\frac{dp^S_{ij}}{dZ_S}=0 \qquad (S\text{不求和}) \qquad (11\cdot23a)$$

$$\frac{\partial\phi_H}{\partial q^d}+a_0^d\frac{dq^d}{dZ_D}=0 \qquad (d\text{不求和}) \qquad (11\cdot23b)$$

式中b_2^S与a_0^d都是常数。而涉及到水压机制的压实内变量q^h的演化方程，则显得比较复杂，原因在于无粘土壤各向同性强化的体积响应通常是非线性的。当水压刚施加时，土壤呈现塑性，在后一阶段则表现为弹性，进而体积应力应变关系弯向应力轴，当水压应力很大时还会出现所谓砂粒的破碎效应（Crushing effect）。尽管发展一种计及大砂粒破碎至小砂粒的细观压实理论是可能的，在这里由于时间与篇幅的限制，我们宁愿把水压限制在不造成破碎效应的情况，并将广义摩擦力$-\partial\phi_H/\partial q^h$与内变量$q^h$的变化率$dq^h/dZ_h$表成非线性的形式

$$\frac{d}{dZ}q^h = æ^h(\sigma) \tag{11·24}$$

将式（11·24）代入（11·22a）中，并应用（11·22a）可得

$$d\varepsilon^h_{KK} = Ad\sigma + \sum_h B^h æ^h(\sigma)dZ_H \tag{11·25}$$

根据实验结果可确认下列近似的非线性关系

$$\sum_h B^h æ^h(\sigma) = \frac{K_0}{\sigma_f}e^{(\lambda/K_0)\sigma} \tag{11·26}$$

及

$$A = \frac{1}{K_0} \tag{11·27}$$

利用式（11·26）、（11·27）、（11·14）、（11·15）和式（11·13）可得

$$\varepsilon^h_{KK} = \sigma_f/K_0\left(\frac{\sigma}{\sigma_f} + 1 - e^{(-\lambda/K_0)\sigma}\right) \tag{11·28}$$

上述方程确定了水压应力的体积响应特性，将此方程与非线性的实验曲线比较，可确定常数σ_f与K_0。

将方程（11·17）的ϕ_H代入(11·23b)及（11·18）的ϕ_D代入（11·23a），可分别求得以平均应力σ的历史表示的q^α演化规律，及以偏应力S_{ij}历史表示的p^S_{ij}的演化规律，将这些遗传积分形式表示的规律分别代人式（11·22a）及（11·22b）中可消去内变量，而求得相应的本构方程，第一种就是描述密实的本构方程

$$\varepsilon^d_{KK} = \sum_d I^d\left[\sigma - \sigma^0 e^{-\gamma^d Z_d} - \int_0^{Z_d} e^{-\gamma^d(Z_d - Z'_d)}\frac{d\sigma}{dZ'_d}dZ'_d\right] \tag{11·29}$$

式中 $I^d = \dfrac{(C^d)^2}{D_d}$　　$\gamma^d = \dfrac{D_d}{a_0{}^d}$

在（11·29)中偏移应力的影响是通过由（11·7）与（11·17)定义的内蕴时间标度Z_d反映的。将式（11·29）对Z_d微分，并限于讨论一个内变量的情况（即$d=1$），我们可求得

$$d\varepsilon^d_{KK} = I\gamma\left[\sigma - \frac{\varepsilon^d_{KK}}{I}\right]dZ_d \tag{11·30}$$

将上式及微分后的（11·29）代入到（11·21）中可得考虑压实与密实后的体积应变

$$d\varepsilon_{KK} = \frac{d\sigma}{K_0} + \frac{K_0}{\sigma_f}e^{(\lambda/K_0)\sigma}dZ_h + I\gamma\left[\sigma_{KK} - \frac{\varepsilon^d_{KK}}{I}\right]dZ_d \tag{11·31}$$

第二种本构方程就是描述偏斜应力响应的下述本构方程

$$S_{ij} = S^0_{ij}\frac{de^p_{ij}}{dZ_S} + 2\mu e^p_{ij} + 2\mu\int_0^{Z_s} e^{-\alpha(Z_s - Z'_s)}\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial Z'_s}dZ'_s \tag{11·32}$$

它与描述金属的本构方程（5·23）有很多相似之处，围压的影响则是通过由（11·6）表示的内时标度Z_s来反映的。

在根据实验定出方程（11·32）与（11·31）中的有关常数后，我们可以利用式(11·28）

(11·31)与(11·32)来分别计算压实应变 ε^h_{KK}，密实应变 ε^d_{KK}及剪应力响应S_{ij}。在参考文献[48]中给出了对 Sancrament 河沙的理论计算数据与实验结果的比较，比较表明所述的方法具有合理的精确度。

习　题

10·1　为了描述中间主应力σ_2对屈服函数的影响，通常引入一个称之为 lode 参数的标量μ来加以量度，它由下式定义

$$\mu=(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3)$$

试证明μ可用主应力偏量表示如下

$$\mu=3S_2/(S_1-S_3)$$

10·2　设在薄壁圆管拉扭试验中造成了下述应力状态

$$\sigma_{11}=\sigma,\ \sigma_{22}=\sigma_{33}=0,\ \sigma_{12}=\tau,\ \sigma_{23}=\sigma_{13}=0$$

并设在拉伸试验中决定的屈服应力为σ_y，试确定在此条件下Tresca与Von Mises准则在$\sigma-\tau$平面中对应的屈服曲线。

10·3　如果假设Von Mises和Tresca屈服准则在单轴拉伸时是吻合的，试确定在纯剪时它们的差值，并画出在π平面上这两条屈服曲线的相对关系；若假设Von Mises和Tresca屈服准则在纯剪时是吻合的，试确定它们在拉伸时的差值，它们在π平面上屈服曲线的相对关系又如何？试讨论在一般情况下初始屈服曲线应落在π平面的什么范围内？

10·4　说明Prandtl-Reuss方程隐含着塑性应变增量主轴与主应力轴重合，并请以主应力来表示该方程。

10·5　试证明当塑性势函数$g(\sigma_{ij})=J_2$时，则下述塑性势方程导致Prandtl-Reuss方程：

$$d\varepsilon^p_{ij}=\mu\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}$$

10·6　试证明等效应力$\widetilde{\sigma}$和等效塑性应变增量$\widetilde{d\varepsilon^p}$的张量形式

$$\overline{\sigma}=\sqrt{3S_{ij}S_{ij}/\alpha}\quad,\qquad \widetilde{d\varepsilon^p}=\sqrt{\frac{2}{3}d\varepsilon^p_{ij}d\varepsilon^p_{ij}}$$

可分别写成下述展开形式

$$\widetilde{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2\right]+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{31}^2)\right\}^{1/2}$$

$$\widetilde{d\varepsilon^p}=\left\{\frac{2}{9}\left[(d\varepsilon^p_{11}-d\varepsilon^p_{22})^2+(d\varepsilon^p_{22}-d\varepsilon^p_{33})^2+(d\varepsilon^p_{33}-d\varepsilon^p_{11})^2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}\left[(d\varepsilon^p_{12})^2+(d\varepsilon^p_{23})^2+(d\varepsilon^p_{31})^2\right]\right\}^{1/2}$$

10·7　试证明Prandtl-Reuss方程中的比例因子$d\lambda$，可用等效应力$\widetilde{\sigma}$及等效塑性应变增量$\widetilde{d\varepsilon^p}$表示如下：

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{\widetilde{d\varepsilon^p}}{\widetilde{\sigma}}$$

10·8　设塑性功增量 $dW^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$，试证明对服从Prandtl-Reuss定律的材料，有下述形式的本构方程

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{dW^p}{\widetilde{\sigma}^2} S_{ij}$$

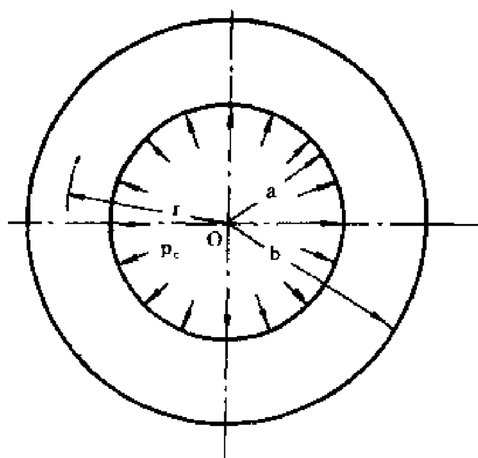
10·9　一根弹一理想塑性矩形截面梁承受纯弯曲载荷，试讨论在不同大小弯矩M的作用下，梁的横截面应力分布曲线的形状。

10·10　如果上题中的矩形截面梁换成屈服后线性强化的材料，并设它可用下述应力应变关系表达

$$\sigma_{11} = \sigma_y + A(\varepsilon_{11} - \sigma_y/E)$$

试分析在梁进入弹塑性范围后横截面上的应力分布情况。

10·11　一个如（题10·11图）示的厚壁球壳承受一个逐渐增加的压力P_0，试用 Mises屈服条件决定初始屈服开始出现时之内压。



题10·11图　承受内压的球壳

10·12　设一试件在加载过程中，从主应力空间的座标（0,0,0)沿一比例加载路径（即加载过程中各应力分量间的比值保持不变）加载至(10000，30000，20000）Pa。假设材料服从各向同性强化，拉伸屈服应力为10000Pa，塑性切线模量为 $10^4/J_2$（单位为 $1/Pa$），试计算其塑性应变增量。

附录A 张量分析

自然界的物质性质与自然规律是一种客观存在，它应当不受我们描述它的方法的影响。为了对物质的物理性质及物理规律进行数学描述，我们常需要某种方便描述的坐标系。可是，同一物理规律或物理属性当用不同坐标系描述时常呈现不同的形式，这里夹杂了由具体坐标系的选取所带来的与物理规律、物质属性无关的东西，引起所论问题的复杂化，甚至模糊了现象的物理本质。而这种物理本质应是同具体坐标系的选择、坐标系的变换无关的。因此，很早人们就开始探索某些数学量，用这些量来描述物理现象时可摆脱具体坐标系的影响，标量和矢量是这样的量。标量可以描述如密度、温度、能量等物理性质，在任何坐标系中标量具有相同的值。矢量可以描述如速度、加速度、位移和力等这样一些运动学和力学量。用矢量形式写出的物理定律如力系平衡条件等是与具体坐标系无关的，虽然其在不同坐标系中的分量是不同的，但当从一个坐标系变换到另一个坐标系时其分量是按一定变换规律变换的。

但具有三个分量的矢量不能用来表示如应力状态、应变状态这样一些力学量，后者需要9个分量表示。为此须将矢量概念推广，而引人张量的概念。在n维向量空间中，p阶张量具有n^p个分量。矢量看成一阶张量，它在三维空间中有3个分量。应力、应变为二阶张量，具有$3^2=9$个分量。

张量是一群量的集合，用它来完全确定地表示某种几何或物理现实，当坐标变换时，这种量按一定的规律进行变换而保持其几何或物理属性不变。用张量方程写出的物理定律或几何定理在任何坐标系中具有不变的形式。这给理论研究工作带来很大方便，我们可以不必针对每个坐标系推导有关定理的形式，只要从任一坐标系（例如笛卡尔坐标系）下推出结果，转化为张量方程，就可适用于各种坐标系。不仅如此，张量还是研究不变量的数学工具，使用张量工具对更完全反映物理现实因而也更复杂的物理模型作数学描述时可显得非常简洁。

在这一附录中，我们将对张量的定义、张量代数和张量分析作简明的介绍。

§1 指标符号

Ⅰ. 指标符号

一些须用一组量才能完全表现其属性的几何、力学或物理现实，常用指标符号表示。指标符号是带有上标或/和下标的符号，例如速度可用v^i表示，i为上标。在三维空间中，指标i取1～3之值。在笛卡尔坐标系中v^1、v^2和v^3分别表示沿x、y和z轴方向的速度分量。注意，上标不是乘方。又如应力用σ^{ij}表示，i，$j=1$，2，3。在笛卡尔坐标系中σ^{12}表垂直于x轴的坐标面上沿y轴方向的应力分量σ_{xy}。又如应变用ε_{ij}表示，这里i、j为下标。以后将了解到，上标与下标具有不同的意义，但在笛卡尔坐标系中，上、下标没有什么区别因而统一采用下标。在一般情况下可同时带有上标和下标，例如

$$T^{ij}_{\cdot\cdot kl},\quad A^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot},\ \cdots$$

注意，一般每个列只能写一个指标，上面的指标符号不能写成，T^{ij}_{kl}，A^{ik}_{j}，为避免这种写法，可在上标（下标）之下（之上）加点。通常，对未赋值的指标符号，代表某物理现实的整体，而当给指标赋予某值后，例如σ^{12}，则表此现实的某一分量。

单指标符号可用列（或行）矩阵表示，而对双指标符号可用方阵表示，例如

$$\mathbf{V}=\{v^i\}=\begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{Bmatrix},\qquad \boldsymbol{\sigma}=[\sigma_{ij}]=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}。$$

为简洁地表示某一物理方程，采用求和约定，规定一项中若有两个指标相同，则对该指标自1至n求和，这里n是向量空间的维数。在三维空间中$n=3$，例如：

$$\sigma_{ii}=\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$$

$$A^{i}_{\cdot k}x^k=\sum_{k=1}^{3}A^{i}_{\cdot k}x^k=A^{i}_{\cdot 1}x^1+A^{i}_{\cdot 2}x^2+A^{i}_{\cdot 3}x^3。$$

求和指标即重复指标也称为哑标（dummy indices），哑标符号可任意更换而不改变其和值，例如：$\sigma_{ii}=\sigma_{kk}$，$A^{i}_{\cdot k}x^k=A^{i}_{\cdot m}x^m$。哑标只能重复一次，重复两次或更多次是无意义的，例如不能有$A^{i}_{\cdot k}B^kC^{j}_{\cdot k}$，这里$k$重复了两次。不重复的指标称为自由指标（free index）。在一个由指标符号写成的方程中各项指标的符号、个数和上下位置应相同，而每一对哑标则应一在上一在下，仅在笛卡尔坐标系时由于上标和下标没有区别，全部指标可都写在下方。例如

任意坐标系下：　$C^{i}_{\cdot j}=A^{i}_{\cdot k}B^{k}_{\cdot j}+D^{ki}E_{kj}$

笛卡尔坐标系下：$C_{ij}=A_{ik}B_{kj}+D_{ki}E_{kj}$

我们可暂时称此为指标量纲一致。

当指标符号对坐标x^i(包括曲线坐标)求偏导数时，用下标“$,i$”表示，例如

$$\sigma^{ij}{}_{,k}=\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^k}。$$

当采用上述规定时，笛卡尔坐标系中的三个平衡方程可用下面一个式子简洁地表示出来

$$\sigma_{ij,i}+\rho f_j=0,\qquad j=1,2,3$$

而联系线性化应变和位移关系的六个几何方程可表示为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})。\qquad i,j=1,2,3$$

Ⅱ．笛卡尔坐标基矢形成的符号

在三维笛卡尔坐标系中，矢量$\mathbf{V}$（用粗体字母表示）可写成它的沿三个坐标轴之分量之和的形式

$$\mathbf{V}=v_i\mathbf{I}_i \tag{A1·1}$$

式中$\mathbf{I}_i=\mathbf{I}^i$是坐标轴$x_i$方向之单位基矢，为无因次量。在空间所有各点，单位基矢$\mathbf{I}_i$的方向是

相同的。$v^i = v_i$为分量的代数值。

下面我们经常要用到由单位基矢$\mathbf{i}_i$形成的符号。

一、Kronecker 符号δ_{ij}

定义

$$\delta^{ij} = \delta^i_{\cdot j} = \delta_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j, \tag{A1·2}$$

即 Kronecker 符号为基矢 $\mathbf{i}_i$ 的点积，它有 9 个分量。由定义显然有

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & 当 i = j \\ 0, & 当 i \neq j。\end{cases} \tag{A1·3}$$

δ_{ij} 有如下性质：

1． $\delta_{ij} = \delta_{ji}$（对称性），

2． $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$， (A1·4a)

3． $\sigma_{ij}\delta_{jk} = \sigma_{ik}$， (A1·4b)

4． $\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}$。 (A1·4c)

二、排列符号(Permutation Symbol)

定义

$$e^{ijk} = e_{ijk} = \mathbf{i}_i \cdot (\mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k), \tag{A1·5}$$

它有 $3^3 = 27$个分量，只取 1， －1， 0三个值。由定义可见

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & 当 i, j, k 按 1, 2, 3 循环排列 \\ -1, & 当 i, j, k 按 3, 2, 1 循环排列 \\ 0, & 当 i, j, k 有两个或两个以上相同时。\end{cases} \tag{A1·6}$$

e_{ijk} 对任意两个指标为反对称，即任意对换两指标的相互位置时其值变号， $e_{ijk} = -e_{jik}$，$e_{ikj} = -e_{ijk}$等等。

即然δ_{ij}与e_{ijk}都为单位基矢之积所构成，可见两者间必存在一定关系。根据向量点叉积的行列式表示法可将(A1·5)式用行列式表示为

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_j\cdot\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_j\cdot\mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_j\cdot\mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \tag{A1·7}$$

此即 e_{ijk} 与 δ_{ij} 间之关系。

三、广义 Kronecker 符号

定义广义 Kronecker 符号为

$$\delta^{pqr}_{ijk} = e_{ijk}e^{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta^{p1} & \delta^{p2} & \delta^{p3} \\ \delta^{q1} & \delta^{q2} & \delta^{q3} \\ \delta^{r1} & \delta^{r2} & \delta^{r3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta^p_i & \delta^q_i & \delta^r_i \\ \delta^p_j & \delta^q_j & \delta^r_j \\ \delta^p_k & \delta^q_k & \delta^r_k \end{vmatrix} \tag{A1·8}$$

对 r 和 k 指标缩并（即令 $r = k$，并对此指标求和）得

$$\delta^{pqk}_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta^p_i & \delta^q_i & \delta^k_i \\ \delta^p_j & \delta^q_j & \delta^k_j \\ \delta^p_k & \delta^q_k & \delta^k_k \end{vmatrix} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = \delta^{pq}_{ij}。 \quad (A1\cdot 9)$$

再对 j 和 q 缩并得

$$\delta^{pjk}_{ijk} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip} \quad (A1\cdot 10)$$

再对 i 和 p 缩并得

$$\delta^{ijk}_{ijk} = 3! = 6 \quad (A1\cdot 11)$$

四、二维情况

对二维情况，可令 $e_{\alpha\beta k}$ 中的 $k = 3$，这里及今后规定希腊字母 α、β、γ、μ、ν …等取 1、2值。令 $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta 3}$，则有

$$e_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha 1} & \delta_{\alpha 2} & \delta_{\alpha 3} \\ \delta_{\beta 1} & \delta_{\beta 2} & \delta_{\beta 3} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha 1} & \delta_{\alpha 2} \\ \delta_{\beta 1} & \delta_{\beta 2} \end{vmatrix}, \quad (A1\cdot 12)$$

$$e_{\alpha\beta}e_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha 1} & \delta_{\alpha 2} \\ \delta_{\beta 1} & \delta_{\beta 2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{\mu 1} & \delta_{\nu 1} \\ \delta_{\mu 2} & \delta_{\nu 2} \end{vmatrix} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} \quad (A1\cdot 13)$$

注意到

$$\delta_{\alpha\alpha} = \delta_{11} + \delta_{22} = 2 \quad (A1\cdot 14)$$

则令式（$A1\cdot 13$）中 $\mu = \alpha$ 时可得：

$$e_{\alpha\beta}e_{\alpha\nu} = \delta_{\beta\nu} \quad (A1\cdot 15)$$

再令 $\nu = \beta$ 又得

$$e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} = 2! \quad (A1\cdot 16)$$

Ⅲ. 行列式的表示

矩阵和行列式可用指标符号表示。矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$，其行列式为

$$\det\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = |a_{ij}| = a = \sum_{p=1}^{3} a_{pq}A_{pq} = \sum_{q=1}^{3} a_{pq}A_{pq} \quad (A1\cdot 17)$$

式中，A_{pq} 为元素 a_{pq} 的代数余子式，a_{ij} 是矩阵和行列式第 i 行第 j 列的元素，a 为行列式之值。

现将三阶行列式用排列符号表示如下：

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1}\delta_{i1} & a_{j2}\delta_{j1} & a_{k3}\delta_{k1} \\ a_{i1}\delta_{i2} & a_{j2}\delta_{j2} & a_{k3}\delta_{k2} \\ a_{i1}\delta_{i3} & a_{j2}\delta_{j3} & a_{k3}\delta_{k3} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}a_{j2}a_{k3} \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = a_{i1}a_{j2}a_{k3}e_{ijk} \quad (A1\cdot 18a)$$

$$= e_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}$$

$$= -e_{ijk}a_{2i}a_{1j}a_{3k} \quad \text{（互换两行变号）} \qquad (A1\cdot18b)$$

由此得

$$ae_{pqr} = a_{pi}a_{qj}a_{rk}e_{ijk} \qquad (A1\cdot19)$$

两边乘以e_{pqr}并利用($A1\cdot11$)式得

$$a = \frac{1}{6}e_{pqr}e_{ijk}a_{pi}a_{qj}a_{rk} \qquad (A1\cdot20)$$

若矩阵$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$，则行列式$|\mathbf{C}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$。证明如下

由矩阵乘积的定义有 $C_{ij}=a_{ik}b_{kj}$ ，利用($A1\cdot18b$)及($A1\cdot19$)式可得：

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = a_{1i}a_{2j}a_{3k}e_{ijk}|\mathbf{B}| = a_{1i}a_{2j}a_{3k}e_{pqr}b_{ip}b_{jq}b_{kr}$$

$$= e_{pqr}c_{1p}c_{2q}c_{3r} = |\mathbf{C}| \qquad (A1\cdot21)$$

证毕。

行列式$|a_{ij}|$的元素a_{pq}的代数余子式A_{pq}等于

$$A_{pq} = \frac{\partial|a_{ij}|}{\partial a_{pq}} = \frac{1}{6}e_{ijk}e_{rst}(\delta_{pi}\delta_{qr}a_{js}a_{kt} + \delta_{pj}\delta_{qs}a_{ir}a_{kt} + \delta_{pk}\delta_{qt}a_{ir}a_{js})$$

$$= \frac{1}{6}(e_{pjk}e_{qst}a_{js}a_{kt} + e_{pki}e_{qtr}a_{ir}a_{kt} + e_{pij}e_{qrs}a_{ir}a_{js})$$

$$= \frac{1}{2}e_{pij}e_{qrs}a_{ir}a_{js}。 \qquad (A1\cdot22)$$

对二阶行列式有：

$$a = e_{\alpha\beta}a_{\alpha1}a_{\beta2} = e_{\alpha\beta}a_{1\alpha}a_{2\beta} \qquad (A1\cdot23)$$

$$ae_{\mu\nu} = e_{\alpha\beta}a_{\alpha\mu}a_{\beta\nu} \qquad (A1\cdot24)$$

$$a = \frac{1}{2}e_{\alpha\beta}e_{\mu\nu}a_{\alpha\mu}a_{\beta\nu} \qquad (A1\cdot25)$$

Ⅳ．矢量代数的指标符号表示

矢量$\mathbf{A}=A_i\mathbf{l}_i$，其分量为

$$A_i = \mathbf{A}\cdot\mathbf{l}_i \qquad (A1\cdot26)$$

一、矢量的点积　矢量$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$的点积为标量

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a_i\mathbf{l}_i\cdot b_j\mathbf{l}_j = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i \qquad (A1\cdot27)$$

二、矢量的叉积　矢量$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$的叉积为矢量$\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} = A_i\mathbf{l}_i\times B_j\mathbf{l}_j = A_iB_j(\mathbf{l}_i\times\mathbf{l}_j) = C_k\mathbf{l}_k$$

最后一等式两边点积$\mathbf{l}_k$得

$$C_k = A_iB_j\mathbf{l}_k\cdot(\mathbf{l}_i\times\mathbf{l}_j) = A_iB_je_{ijk} \qquad (A1\cdot28)$$

三、矢量三重积

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = A_iB_jC_k\mathbf{l}_i\cdot(\mathbf{l}_j\times\mathbf{l}_k) = e_{ijk}A_iB_jC_k \qquad (A1\cdot29)$$

§2　曲线坐标系、基矢、度量张量

Ⅰ．曲线坐标系、基矢

在 n 维欧氏空间(Euclidean Space)中，可建立正交直线坐标系，即笛卡尔坐标系$\{y^i\}$。为此在空间中取一坐标原点，并取一组(n 个)坐标系的基矢 $\mathbf{l}_i$，它们在空间各点是相同的，且满足

$$\mathbf{l}_i\cdot\mathbf{l}_j=\delta_{ij} \qquad (A2\cdot1)$$

即各坐标轴间是相互正交的。由式($A2\cdot1$)易证笛卡尔坐标基矢是线性独立的。n 维欧氏空间任一点P的位置可由其笛卡尔坐标(y^1，y^2，…，y^n)确定。设 $\mathbf{r}$ 表自原点 0 至P点的位置矢量，则

$$\mathbf{r}=y^i\mathbf{l}_i \qquad (A2\cdot2)$$

取 n 个笛卡尔坐标的纯量函数 x^i

$$x^i=x^i(y^1,\ \cdots,\ y^n)\qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (A2\cdot3)$$

假设：(1)函数x^i 在所论域 R_y 上单值连续，且有一阶连续偏导数；(2)函数的雅可比行列式 J 不为 0，即

$$J=\left|\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|=\begin{vmatrix}\partial x^1/\partial y^1, & \partial x^1/\partial y^2, & \cdots\cdots, & \partial x^1/\partial y^n\\ \vdots & & & \vdots\\ \partial x^n/\partial y^1, & \partial x^n/\partial y^2, & \cdots\cdots, & \partial x^n/\partial y^n\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (A2\cdot4)$$

则存在连续可微的反变换

$$y^i=y^i(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)\qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (A2\cdot5)$$

且$\{x^i\}$与$\{y^i\}$间是一一对应的。

满足条件(1)和(2)的变换($A2\cdot3$)和($A2\cdot5$)称为容许变换(Admissible Transformations)。当$J>0$时，则称变换为正向的，在三维欧氏空间中表现为从左手系到右手系的变换，这种变换称为正常变换。而当$J<0$时则称变换为负向的，在三维欧氏空间中表现为从右手系到左手系的变换，这种变换称为非正常的。不可能在一部分区域$J>0$而在另一部分区域$J<0$，否则根据假设(1)，在两区域的过渡区中必存在$J=0$的点，此与假设(2)矛盾。今后我们主要限于容许的和正常的变换，在个别情况下也提到非正常的变换。

若给某个x^i以定值c_i，则($A2\cdot3$)式决定一超曲面($n-1$ 维子空间)，n 个$n-1$维超曲面交于一个空间点。若除了 $i=N$ 的x^i外，给其余 $n-1$ 个x^i以定值，则得到一条坐标线x^N，当N取 1，2 …，n 各值时，就得到 n 条坐标线，每一空间点都有 n 条坐标线通过，每两条坐标线决定一坐标面，它们为 2 维子空间，有$C_n^2=n(n-1)/2$个。此空间的 n 族坐标线就构成了 n 维空间的坐标系，若式($A2\cdot3$)为线性函数，则为仿射(斜角)坐标系，若式($A2\cdot3$)不是线性函数，则为曲线坐标系。根据变换($A2\cdot5$)式，P 点的位置矢量$\mathbf{r}$可写为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n), \qquad (A2\cdot6)$$

从 P 至邻近一点的微向量$d\mathbf{r}$为

$$d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}dx^i \qquad (A2\cdot7)$$

偏导数

$$\mathbf{g}_i=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i} \tag{A2·8}$$

为切于坐标线x^i的向量，称为坐标基矢或协变基矢。当为仿射坐标系时，空间各点的基矢$\mathbf{g}_i$是相同的，即$\mathbf{g}_i$为恒矢量。而在曲线坐标系中，$\mathbf{g}_i$的大小和方向是随空间点连续变化的，这样，在空间每一点都有一个局部坐标基组$\{\mathbf{g}_i\}$，可看做该点无限小邻域的一个仿射坐标基。

Ⅱ．度量张量

位置矢量微分$d\mathbf{r}$的长度平方为

$$ds^2=d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=g_{ij}dx^idx^j\geqslant 0 \tag{A2·9}$$

等号只在dx^i全为零时成立，式中

$$g_{ij}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j \tag{A2·10}$$

称为度量张量，因为它起着度量$d\mathbf{r}$长度的尺规的作用。由($A2$·9)式可见，矩阵$[g_{ij}]$为正定的，因此其行列式之值

$$|g_{ij}|=g>0 \tag{A2·11}$$

我们由下式定义另一组基矢$\mathbf{g}^i$称为逆变基矢

$$\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}_j=\delta^i_j \tag{A2·12}$$

由上式可见，逆变基矢$\mathbf{g}^i$是与除$\mathbf{g}_i$外所有协变基矢$\mathbf{g}_j$($j\neq i$)正交，因而沿包含所有这些基矢的超曲面$x^i=x^i(y^k)=x^i(P)$在该点P处之法线方向。与式($A2$·10)类似，称

$$g^{ij}=\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^j \tag{A2·13}$$

为逆变度量张量。一般地说基矢$\mathbf{g}_i$和逆变基矢$\mathbf{g}^i$的模不等于1，由式($A2$·10)和($A2$·13)可见，它们的模分别为

$$|\mathbf{g}_i|=\sqrt{g_{(ii)}},\qquad |\mathbf{g}^i|=\sqrt{g^{(ii)}}。 \tag{A2·14}$$

指标加括号表不对该重复指标求和。

我们可将$\mathbf{g}_i$沿$\mathbf{g}^j$分解，也可将$\mathbf{g}^i$沿$\mathbf{g}_j$分解，且易证，此分解系数分别为g_{ij}和g^{ij}，即

$$\mathbf{g}_i=g_{ik}\mathbf{g}^k \tag{A2·15a}$$

$$\mathbf{g}^i=g^{ik}\mathbf{g}_k \tag{A2·15b}$$

可见，g_{ij}和g^{ij}起着升、降基矢指标的作用。将($A2$·15a)式点积$\mathbf{g}^j$可得

$$g_{ik}g^{kj}=\delta^j_i\qquad i,\ j=1,2,\cdots,n \tag{A2·16}$$

若g_{ij}之值已知，则上式为关于g^{ij}的n^2个线性方程组，用以求解n^2个g^{ij}之值，其解为：

$$g^{ij}=\frac{G^{ji}}{g}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ji}} \tag{A2·17}$$

式中G^{ji}为行列式$|g_{ij}|$中第j行第i列元素g_{ji}的代数余子式。类似地，若已知g^{ij}，则由($A2$·16)式可求得g_{ij}如下：

$$g_{ij}=\frac{G_{ji}}{g^*}=\frac{1}{g^*}\frac{\partial g^*}{\partial g^{ji}} \tag{A2·18}$$

式中g^*为行列式$|g^{ij}|$之值，G_{ji}为行列式$|g^{ij}|$中元素g^{ji}的代数余子式。由式($A2$·16)可得

下列矩阵间关系式

$$[g_{ik}][g^{kj}]=[\delta_i^j] \qquad (A2\cdot19)$$

上式右边为单位方阵。按照式($A1\cdot21$)，由上式可得

$$gg^*=1$$

由此

$$g^*=1/g. \qquad (A2\cdot20)$$

若为笛卡尔坐标系，则 $\mathbf{g}_i=\mathbf{I}_i$，从而$g_{ij}=\delta_{ij}$，再由式($A2\cdot15a$)得，$\mathbf{I}^i=\mathbf{I}_i$从而$g^{ij}=\delta_{ij}=g_{ij}$。因此，在笛卡尔坐标系情况下，上标与下标没有什么区别。

Ⅲ．基矢与度量张量的计算

由($A2\cdot8$)式与($A2\cdot2$)式可建立从笛卡尔坐标基矢$\mathbf{I}_k$到曲线坐标系基矢$\mathbf{g}_i$间的变换关系：

$$\mathbf{g}_i=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}=\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\mathbf{I}_k, \qquad (A2\cdot21)$$

由此得

$$g_{ij}=\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial y^k}{\partial x^j}, \qquad (A2\cdot22)$$

写成矩阵形式为

$$[g_{ij}]=\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right]^T\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right]。 \qquad (A2\cdot23)$$

对上式取行列式得

$$g=\left|\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right|^2, \quad \left|\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right|=\sqrt{g}。 \qquad (A2\cdot24)$$

注意到

$$\left[\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right]\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right]=[\delta_i^j]$$

及

$$[g_{ik}][g^{kj}]=[\delta_i^j]$$

可得

$$\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right]^{-1}=\left[\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right], \qquad (A2\cdot25)$$

和

$$[g^{ij}]=[g_{ij}]^{-1}。$$

由此得

$$[g^{ij}]=\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right]^{-1}\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right]^{-T}=\left[\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right]\left[\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right]^T \qquad (A2\cdot26)$$

及

$$g^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^k} \qquad (A2\cdot27)$$

而逆变基矢可求得为

$$\mathbf{g}^i=g^{ij}\mathbf{g}_j=\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial y^p}{\partial x^j}\mathbf{I}_p$$

$$=\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\mathbf{I}_k=\nabla x^i \qquad (A2\cdot28)$$

即逆变基矢$\mathbf{g}^i$即为超曲面$x^i=x^i(y^k)$的梯度。式中∇为向量微分算子，

$$\nabla=\mathbf{I}_k\frac{\partial}{\partial y^k}。 \qquad (A2\cdot29)$$

Ⅳ. 基矢的三重积和叉积

在三维欧氏空间中，我们定义基矢的三重积为Eddington张量$\in_{ijk}$和$\in^{ijk}$：

$$\in_{ijk}=\mathbf{g}_i\cdot(\mathbf{g}_j\times\mathbf{g}_k)=\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\quad\frac{\partial y^q}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial y^r}{\partial x^k}e_{pqr}$$

$$=e_{ijk}\left|\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\right|=e_{ijk}\sqrt{g}\tag{A2·30a}$$

$$\in^{ijk}=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{g}^j\times\mathbf{g}^k)=\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial y^r}e^{pqr}$$

$$=e^{ijk}\left|\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\right|=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{ijk}\tag{A2·30b}$$

显然有　　$\in^{ijk}\in_{pqr}=e^{ijk}e_{pqr}$　　(A2·31)

令　　$\mathbf{g}^j\times\mathbf{g}^k=A^{ijk}\mathbf{g}_i$

即得　　$A^{ijk}=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{g}^j\times\mathbf{g}^k)=\in^{ijk}$

由此　　$\mathbf{g}^j\times\mathbf{g}^k=\in^{ijk}\mathbf{g}_i$　　(A2·32)

上式两边乘以$\in_{rjk}$并利用式(A2·31)和(A1·10)可得$\in_{rjk}\mathbf{g}^j\times\mathbf{g}^k=2\mathbf{g}_r$，由此得

$$\mathbf{g}_i=\frac{1}{2}\in_{ijk}\mathbf{g}^j\times\mathbf{g}^k=\frac{1}{2}e_{ijk}\sqrt{g}(\mathbf{g}^j\times\mathbf{g}^k)\tag{A2·33}$$

同样求得　　$\mathbf{g}_j\times\mathbf{g}_k=\in_{ijk}\mathbf{g}^i$　　(A2·34)

及　　$\mathbf{g}^i=\frac{1}{2}\in^{ijk}\mathbf{g}_j\times\mathbf{g}_k=\frac{e^{ijk}}{2\sqrt{g}}(\mathbf{g}_j\times\mathbf{g}_k)$　　(A2·35)

Ⅴ. 矢量的分解及其物理分量

这样在n维欧氏空间中有两组基矢$\{\mathbf{g}_i\}$和$\{\mathbf{g}^i\}$，任意矢量可沿此两组基矢分解为

$$\mathbf{V}=v^i\mathbf{g}_i=v_i\mathbf{g}^i\tag{A2·36}$$

分解系数v^i和v_i分别称为矢量$\mathbf{V}$的逆变和协变分量，且显然有

$$v^i=\mathbf{V}\cdot\mathbf{g}^i\tag{A2·37a}$$

$$v_i=\mathbf{V}\cdot\mathbf{g}_i\tag{A2·37b}$$

由于基矢的模及因次不为1，故v^i和v_i并非$\mathbf{V}$沿$\mathbf{g}_i$和$\mathbf{g}^i$方向的物理分量，仅当基矢$\mathbf{g}_i$和$\mathbf{g}^i$为无因次单位矢量时(例如，笛卡尔坐标系情况)v^i和v_i才是物理分量。为求在一般曲线坐标系下矢量的物理分量，我们将(A2·37)式改写为

$$\mathbf{V}=v^i\sqrt{g_{(ii)}}\frac{\mathbf{g}_i}{\sqrt{g_{(ii)}}}\tag{A2·38a}$$

$$=v_i\sqrt{g^{(ii)}}\frac{\mathbf{g}^i}{\sqrt{g^{(ii)}}}\tag{A2·38b}$$

根据(A2·14)式，$\mathbf{g}_i/\sqrt{g_{(ii)}}$和$\mathbf{g}^i/\sqrt{g^{(ii)}}$为无因次单位矢量，可见$v^i\sqrt{g_{(ii)}}$为$\mathbf{V}$沿$\mathbf{g}_i$的物理分量，而$v_i\sqrt{g^{(ii)}}$为$\mathbf{V}$沿$\mathbf{g}^i$的物理分量。

现再求$\mathbf{V}$在基矢上的投影。$\mathbf{V}$在$\mathbf{g}_i$上的投影为

$$\mathbf{V}\cdot\frac{\mathbf{g}_i}{\sqrt{g_{(ii)}}}=v_j\mathbf{g}^j\cdot\frac{\mathbf{g}_i}{\sqrt{g_{(ii)}}}=\frac{v_i}{\sqrt{g_{(ii)}}} \tag{A2·39a}$$

而V在$\mathbf{g}^i$上的投影为

$$\mathbf{V}\cdot\frac{\mathbf{g}^i}{\sqrt{g^{(ii)}}}=v^j\mathbf{g}_j\cdot\frac{\mathbf{g}^i}{\sqrt{g^{(ii)}}}=\frac{v^i}{\sqrt{g^{(ii)}}} \tag{A2·39b}$$

矢量的模的平方定义为

$$\begin{aligned}|\mathbf{V}|^2&=\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}=v^i\mathbf{g}_i\cdot v^j\mathbf{g}_j=v^iv^jg_{ij}\\&=v_i\mathbf{g}^i\cdot v_j\mathbf{g}^j=v_iv_j\cdot g^{ij}\\&=v_i\mathbf{g}^i\cdot v^j\mathbf{g}_j=v_iv^i\end{aligned} \tag{A2·40}$$

这里又看到度量张量g_{ij}和g^{ij}起着升降指标的作用。而两矢量u和V间夹角的方向余弦定义为

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{V})=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{V}}{|\mathbf{u}||\mathbf{V}|}=\frac{u_kv^k}{\sqrt{u_iu^i}\sqrt{v_jv^j}} \tag{A2·41}$$

§3 坐标变换、张量的定义

Ⅰ. 正、逆变换系数·基矢的坐标变换

设有一原坐标系$\{x^i\}$，其协变基矢为$\{\mathbf{g}_i\}$，另考虑一新坐标系$\{x^{i'}\}$，其协变基矢为$\{\mathbf{g}_{i'}\}$。将新协变基矢用原坐标系协变基矢表示

$$\mathbf{g}_{i'}=\beta^i_{i'}\mathbf{g}_i \tag{A3·1a}$$

由此

$$\beta^i_{i'}=\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}_{i'} \tag{A3·1b}$$

称$\beta^i_{i'}$为正变换系数(或协变换系数)。新坐标基矢$\{\mathbf{g}_{i'}\}$线性独立的条件是矩阵$[\beta^i_{i'}]$为非奇异，其中$[\beta^i_{i'}]$为

$$[\beta^i_{i'}]=\begin{pmatrix}\beta^1_{1'} & \beta^1_{2'} & \cdots\cdots & \beta^1_{n'}\\ \beta^2_{1'} & \beta^2_{2'} & \cdots\cdots & \beta^2_{n'}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta^n_{1'} & \beta^n_{2'} & \cdots\cdots & \beta^n_{n'}\end{pmatrix}。 \tag{A3·1c}$$

同样，原坐标基矢$\mathbf{g}_i$也可用新坐标基矢$\mathbf{g}_{i'}$表示

$$\mathbf{g}_i=\beta^{i'}_i\mathbf{g}_{i'} \tag{A3·2a}$$

由此

$$\beta^{i'}_i=\mathbf{g}^{i'}\cdot\mathbf{g}_i \tag{A3·2b}$$

称$\beta^{i'}_i$为逆变换系数，其矩阵为

$$[\beta_i^{j'}]=\begin{pmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} \cdots\cdots \beta_n^{1'}\\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} \cdots\cdots \beta_n^{2'}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_1^{n'} & \beta_2^{n'} \cdots\cdots \beta_n^{n'}\end{pmatrix} \qquad (A3\cdot 2c)$$

将($A3\cdot1a$)式代入($A3\cdot2a$)式得

$$\mathbf{g}_i=\beta_i^{k'}\beta_{k'}^j\mathbf{g}_j$$

由于{$\mathbf{g}_i$}线性独立，得

$$\beta_i^{k'}\beta_{k'}^j=\delta_i^j \qquad (A3\cdot3a)$$

或用矩阵表示为

$$[\beta_{k'}^j][\beta_i^{k'}]=[\delta_i^j] \qquad (A3\cdot3b)$$

上式右边为单位矩阵，因此正变换系数矩阵$[\beta_{k'}^j]$和逆变换系数矩阵$[\beta_i^{k'}]$互为逆矩阵。

不难证明，原坐标系逆变基矢$\mathbf{g}^i$与新坐标系逆变基矢$\mathbf{g}^{i'}$之间相互变换也是通过正变换系数和逆变换系数：

$$\mathbf{g}^{i'}=\beta_j^{i'}\mathbf{g}^j \qquad (A3\cdot4)$$

$$\mathbf{g}^i=\beta_{j'}^i\mathbf{g}^{j'} \qquad (A3\cdot5)$$

这样，当由原坐标系向新坐标系变换时，协变基矢是按正(协)变换系数变换，而逆变基矢是按逆变换系数变换，这也是分别称它们为协变基矢和逆变基矢的原因。

当原坐标系与新坐标系均为笛卡尔坐标系时，有$\mathbf{i}^{i'}=\mathbf{i}_{i'}$，$\mathbf{i}^i=\mathbf{i}_i$，由此$\beta_i^{i'}=\beta_{i'}^i$，即正、逆变换系数相同，且由式($A3\cdot3b$)可得(此时$[\beta_i^{i'}]=[\beta_{i'}^i]^T$)变换系数矩阵的行列式$|\beta_{i'}^i|$之值为1。在笛卡尔坐标系下，上标与下标没有区别，可全部写成下标，即有$\beta_i^{i'}=\beta_{i'i}$，$\beta_{i'}^i=\beta_{ii'}$，且$\beta_{i'i}=\beta_{ii'}$。为了省去下标中的"一撇"，规定有"一撇"(即新坐标系)的下标写在前头，而无"一撇"的下标写在后头，于是在笛卡尔坐标系之间进行坐标变换情况下，式($A3\cdot1a$)、($A3\cdot2a$)、($A3\cdot4$)和($A3\cdot5$)可归并为下面两式

$$\mathbf{i}_{i'}=\beta_{ij}\mathbf{i}_j \qquad (A3\cdot6a)$$

$$\mathbf{i}_i=\beta_{ij}\mathbf{i}_{j'} \qquad (A3\cdot6b)$$

其中 $$\beta_{ij}=\cos(\mathbf{i}_{i'},\ \mathbf{i}_j) \qquad (A3\cdot6c)$$

现求变换系数的表达式。根据基矢的定义，我们有

$$\mathbf{g}_{i'}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\mathbf{g}_j$$

但按式($A3\cdot1a$)又有$\mathbf{g}_{i'}=\beta_{i'}^j\mathbf{g}_j$由此得：

$$\left(\beta_{i'}^j-\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right)\mathbf{g}_j=0$$

由 { $\mathbf{g}_i$ } 的线性独立即得

$$\beta^i_{\ i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \qquad (A3\cdot7a)$$

同样可证

$$\beta^{i'}_{\ j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \qquad (A3\cdot7b)$$

Ⅱ．基本张量的坐标变换

现求度量张量的坐标变换。由式（$A2\cdot10$）及（$A3\cdot1a$）可得：

$$g_{i'j'} = \mathbf{g}_{i'}\cdot\mathbf{g}_{j'} = \beta^k_{\ i'}\ \beta^l_{\ j'} g_{kl}。 \qquad (A3\cdot8)$$

同样方法可得

$$g^{i'j'} = \mathbf{g}^{i'}\cdot\mathbf{g}^{j'} = \beta^{i'}_{\ k}\ \beta^{j'}_{\ l} g^{kl}。 \qquad (A3\cdot9)$$

根据式（$A2\cdot23$）我们有

$$[g_{i'j'}] = \left[\frac{\partial y^k}{\partial x^{i'}}\right]^T\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^{j'}}\right] = \left(\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^p}\right]\left[\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\right]\right)^T\left(\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^q}\right]\left[\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\right]\right)$$

$$= \left[\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\right]^T\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^p}\right]^T\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^q}\right]\left[\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\right] = \left[\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\right]^T [g_{pq}]\left[\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\right]$$

$$= [\beta^p_{\ i'}]^T[g_{pq}][\beta^q_{\ j'}] \qquad (A3\cdot10)$$

上式两端取行列式得 $g' = |\beta^p_{\ p'}|^2 g$

由此

$$\sqrt{g'} = |\beta^p_{\ p'}|\sqrt{g} \qquad (A3\cdot11)$$

式中 g' 为矩阵 $[g_{i'j'}]$ 的行列式之值。

在三维欧氏空间中不难求得 Eddington 张量的坐标变换如下

$$\in_{i'j'k'} = \mathbf{g}_{i'}\cdot(\mathbf{g}_{j'}\times\mathbf{g}_{k'}) = \beta^i_{\ i'}\ \beta^j_{\ j'}\ \beta^k_{\ k'}\in_{ijk} \qquad (A3\cdot12)$$

$$\in^{i'j'k'} = \mathbf{g}^{i'}\cdot(\mathbf{g}^{j'}\times\mathbf{g}^{k'}) = \beta^{i'}_{\ i}\ \beta^{j'}_{\ j}\ \beta^{k'}_{\ k}\in^{ijk} \qquad (A3\cdot13)$$

Ⅲ．矢量的坐标变换

现看矢量的协变和逆变分量的坐标变换规则。将（$A2\cdot36$）式在原、新坐标系中写出

$$\mathbf{V} = v^{i'}\mathbf{g}_{i'} = v^{i'}\beta^k_{\ i'}\mathbf{g}_k$$

$$= v^k\,\mathbf{g}_k = v^k\,\beta^{i'}_{\ k}\mathbf{g}_{i'}$$

由于 { $\mathbf{g}_i$ } 和 { $\mathbf{g}_{i'}$ } 的线性独立性，即得

$$v^{i'} = \beta^{i'}_{\ k} v^k \qquad (A3\cdot14a)$$

$$v^k = \beta^k_{\ i'} v^{i'} \qquad (A3\cdot14b)$$

可见由原坐标系变换到新坐标系时，矢量的逆变分量是按逆变换系数 $\beta^{i'}_{\ k}$ 变换的，故称之为逆

变分量。同样，由

$$\mathbf{V}=v_{i'}\mathbf{g}^{i'}=v_{i'}\beta^{i'}_{k}\mathbf{g}^{k}$$

$$=v_{k}g^{k}=v_{k}\beta^{k}_{i'}\mathbf{g}^{i'}$$

可得

$$v_{i'}=\beta^{k}_{i'}v_{k} \tag{A3·15a}$$

$$v_{k}=\beta^{i'}_{k}v_{i'} \tag{A3·15b}$$

可见由原坐标系变换到新坐标系时，矢量的协变分量是按协变换系数$\beta^{k}_{i'}$变换的，故称之为协变分量。

这样，在坐标变换时，因矢量V保持不变，其分量应按一定的变换规律即逆变换和协变换规律变换。由此引入一阶张量的概念。

Ⅳ. **张量（Tensor）的定义**

在n维空间中，若一个量T在任一坐标系中都可用有一个下标或一个上标的n个有序数T_i或T^i表示，当坐标变换时它们服从以下的变换规律

$$T_{i'}=\beta^{j}_{i'}T_{j} \tag{A3·16a}$$

$$T^{i'}=\beta^{i'}_{j}T^{j} \tag{A3·16b}$$

则称该量为一阶绝对张量，而T_i为一阶张量的协变分量(Contravariant Component)，T^i为一阶张量的逆变分量。(Contravariant Component)。

可见矢量是一阶张量。一阶张量可用式(A3·16a)、(A3·16b)定义，也可用式(A2·36)的不变性记法来定义。从式(A2·36)可见，矢量V的分解式对任何坐标系都是相同的，因此具有坐标变换的不变性。用(A3·16)式定义的一阶张量和用(A2·36)式定义的一阶张量是等价的。上面我们看到由不变式(A2·36)推得(A3·16)式的一阶张量定义，同样我们可由(A3·16)式的定义和基矢的坐标变换式(A3·1a)、(A3·4)推得式(A2·36)的不变式。

同时，我们把坐标变换下不变其值的纯量函数$f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$(如温度、密度)定义为零阶绝对张量，即

$$f(x^1, x^2, \cdots, x^n)=f(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}) \tag{A3·17}$$

现将一阶张量的定义推广于二阶张量。在n维空间中若一个量T在任一坐标系中都可用n^2个量T^{ij}或T_{ij}或$T^{i}_{\cdot j}$确定，在坐标变换下这些量按以下规律变换：

$$T^{i'j'}=\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}T^{ij} \tag{A3·18a}$$

$$T_{i'j'}=\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}T_{ij} \tag{A3·18b}$$

$$T^{i'}_{\cdot j'}=\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}T^{i}_{\cdot j} \tag{A3·18c}$$

则称量T为二阶绝对张量，而T^{ij}、T_{ij}和$T^{i}_{\cdot j}$分别是此二阶张量的逆变分量、协变分量和混变分量(Mixed Component)。

同矢量的不变性记法($A2\cdot36$)式一样，对二阶绝对张量我们也引进不变性记法

$$\mathbf{T}=T^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j \tag{$A3\cdot19a$}$$

$$=T_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \tag{$A3\cdot19b$}$$

$$=T^{i}_{\cdot j}\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}^j \tag{$A3\cdot19c$}$$

这里两基矢之间没有运算，故称为并矢(Dyadic)，而这种不变性记法也叫做并矢记法。同一阶张量情形一样，二阶张量的分量定义法($A3\cdot18$)式同并矢记法定义法($A3\cdot19$)式是等价的。由式($A3\cdot18$)的定义法和基矢的坐标变换式($A3\cdot1$)～($A3\cdot5$)可推得不变性记法($A3\cdot19$)式，反之由不变性记法($A3\cdot19$)式和基矢的坐标变换式($A3\cdot1$)～($A3\cdot5$)可推得式($A3\cdot18$)的分量定义法。

通过度量张量的升、降指标的作用，可从一种张量分量过渡到另一种分量。事实上由式($A2\cdot15$)可得

$$\mathbf{T}=T_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j=T_{ij}g^{ik}\mathbf{g}_k\mathbf{g}^j,$$

但 $$\mathbf{T}=T^{k}_{\cdot j}\mathbf{g}_k\mathbf{g}^j,$$

由此得 $$T^{k}_{\cdot j}=T_{ij}g^{ik}, \tag{$A3\cdot20a$}$$

同样可得 $$T^{k}_{\cdot j}=T^{ki}g_{ij}。 \tag{$A3\cdot20b$}$$

这说明各种不同分量之间不是相互独立的，其不同的表示法是非本质的。

进一步推广定义于高阶张量。一个量T在任何坐标系中都可用带 r 个上标 s 个下标的 n^{r+s} 个量 $T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$ 确定，在坐标变换时，它们按下列规律变换：

$$T^{i'\cdots j'}{}_{k'\cdots l'}=\left|\beta^{p}_{p'}\right|^{q}\beta^{i'}_{i}\cdots\beta^{j'}_{j}\,\beta^{k}_{k'}\cdots\beta^{l}_{l'}T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} \tag{$A3\cdot21$}$$

则该量T为 $r+s$ 阶张量，而 $T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$ 为其 r 阶逆变 s 阶协变分量。其中 q 为张量的权，$r+s$ 为张量的阶。指标的上、下是非本质的，只是同一张量的不同表示法。权和阶相同的张量称为同型张量。$q=0$ 情形称为绝对张量，$q\neq0$ 情形称为相对张量。

高阶张量的不变性记法为：

$$\begin{aligned}\mathbf{T}&=T^{i'\cdots j'}{}_{k'\cdots l'}\sqrt{g'}^{-q}\mathbf{g}_{i'}\cdots\mathbf{g}_{j'}\mathbf{g}^{k'}\cdots\mathbf{g}^{l'}\\&=T^{i'\cdots j'}{}_{k'\cdots l'}\left(|\beta^{p}_{p'}|\sqrt{g}\right)^{-q}\beta^{i}_{i'}\mathbf{g}_i\cdots\beta^{j}_{j'}\mathbf{g}_j\,\beta^{k'}_{k}\mathbf{g}^k\cdots\beta^{l'}_{l}\mathbf{g}^l\\&=\left(T^{i'\cdots j'}{}_{k'\cdots l'}\beta^{i}_{i'}\cdots\beta^{j}_{j'}\,\beta^{k'}_{k}\cdots\beta^{l'}_{l}|\beta^{p'}_{p}|^{q}\right)\sqrt{g}^{-q}\mathbf{g}_i\cdots\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\cdots\mathbf{g}^l\\&=T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\sqrt{g}^{-q}\mathbf{g}_i\cdots\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\cdots\mathbf{g}^l\end{aligned} \tag{$A3\cdot22$}$$

根据张量的定义可见，度量张量是二阶绝对张量，采用并矢记法

$$\mathbf{I}=g_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j=g^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j=\delta^{i}_{j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j。 \tag{$A3\cdot23$}$$

Eddington张量是三阶绝对张量，采用并矢记法

$$\boldsymbol{\in}=\in_{ijk}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k=\in^{ijk}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k \tag{$A3\cdot24$}$$

而按式($A3\cdot11$)，$\sqrt{g}$ 是权为1的零阶张量。注意，对权不为零的零阶张量，坐标变换时要

改变其值。

由张量变换式($A3\cdot21$)可见，若一张量的全部分量在某一坐标系中为零，则必在其它坐标系中也为零，因而是零张量。

若互换张量分量某两指标的前后位置（不是上下位置）后其值不变，则称此张量关于此两指标为对称的。例如度量张量即为对称张量，$g^{ij}=g^{ji}$，$g_{ij}=g_{ji}$。

若互换张量分量某两指标的前后位置后其值反号，则称该张量为关于此两指标反对称的。例如Eddington张量为关于任意两指标反对称的张量，即$\in^{ijk}=-\in^{jik}$等。

在三维欧氏空间中，任一二阶反对称张量与一矢量对偶。设T^{ij}为一二阶反对称张量，$T^{ij}=-T^{ji}$，则与它对偶的矢量为$\omega_k=\frac{1}{2}\in_{ijk}T^{ij}$。事实上将三阶张量协变分量和二阶张量逆变分量的坐标变换式代入上式右边，则不难证明上式左边ω_k符合一阶张量协变分量的坐标变换律。

这样，由张量**T**的不变性，推出张量分量的坐标变换规律，反之按照这些坐标变换律可推得张量**T**在坐标变换下的不变性。

§4 张量代数

下面介绍几种张量的代数运算，其结果仍为张量。若为曲线坐标系，以下运算限于在定义于同一空间点处的张量之间进行。

I 张量的加法（Addition of Tensors）

两同型张量相加，结果仍为同型张量。设有两同型张量$\mathbf{A}=\sqrt{g}^{-q}A^{ij}{}_k\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k$和$\mathbf{B}=\sqrt{g}^{-q}B^{ij}{}_k\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k$，其和为**C**，则

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\sqrt{g}^{-q}A^{ij}{}_k\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k+\sqrt{g}^{-q}B^{ij}{}_k\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k$$

$$=\sqrt{g}^{-q}(A^{ij}{}_k+B^{ij}{}_k)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k$$

$$=\sqrt{g}^{-q}C^{ij}{}_k\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k=\mathbf{C} \qquad (A4\cdot1a)$$

由此

$$C^{ij}{}_k=A^{ij}{}_k+B^{ij}{}_k \qquad (A4\cdot1b)$$

即两同型张量相加，只要将其同型分量相加即可。所谓同型分量指具有同阶同顺序上下标的分量。

任一二阶张量可唯一地分解为对称与反对称张量之和。事实上

$$T^{ij}=\frac{1}{2}(T^{ij}+T^{ji})+\frac{1}{2}(T^{ij}-T^{ji})$$

$$=\overset{s}{T}{}^{ij}+\overset{a}{T}{}^{ij} \qquad (A4\cdot2)$$

其中

$$\overset{s}{T}{}^{ij}=\frac{1}{2}(T^{ij}+T^{ji})=\overset{s}{T}{}^{ji}$$

为对称张量

而 $$\overset{a}{T}{}^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) = -\overset{a}{T}{}^{ji}$$

为反对称张量。

Ⅱ．张量的外积（Outer Product）

张量的外积也称并乘。任意两张量**A**与**B**并乘的结果仍为张量，其权与阶分别等于两张量权与阶之和。

$$\mathbf{AB} = (A^i_{\cdot j}\sqrt{g}^{-q_1}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j)(B_k{}^l\sqrt{g}^{-q_2}\mathbf{g}^k\mathbf{g}_l)$$

$$= (A^i{}_jB_k{}^l)\sqrt{g}^{-(q_1+q_2)}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k\mathbf{g}_l$$

$$= C^i_{\cdot jk}{}^l_\cdot\sqrt{g}^{-q}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k\mathbf{g}_l \qquad (A4\cdot3a)$$

由此 $$q = q_1 + q_2 \qquad (A4\cdot3b)$$

$$C^i_{\cdot jk}{}^l_\cdot = A^i_{\cdot j}B_k{}^l_\cdot \qquad (A4\cdot3c)$$

即其权相加，其分量并乘。

张量的并乘与前后次序有关，即

$$\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}。 \qquad (A4\cdot4)$$

Ⅲ 张量的缩并（Contraction）

缩并运算只适用于张量的混变分量。若混变分量的一上标与一下标相同，则对该重复指标求和，所得结果为阶次低二阶的张量。例如三阶张量 $A_{ij}{}^k$ 对 j 与 k 指标缩并，即令 $k = j$，得一阶张量$B_i = A_{ij}{}^j$。事实上，因$A_{ij}{}^k$为张量，故满足变换律

$$A_{i'j'}{}^{k'} = \beta^i_{i'}\ \beta^j_{j'}\ \beta^{k'}_k A_{ij}{}^k$$

现令$k' = j'$得

$$A_{i'j'}{}^{j'} = \beta^i_{i'}\ \beta^j_{j'}\ \beta^{j'}_k A_{ij}{}^k$$

$$= \beta^i_{i'}\ \delta^j_k\ A_{ij}{}^k$$

$$= \beta^i_{i'}\ A_{ij}{}^j \qquad (A4\cdot5a)$$

可见缩并结果为阶次低二阶的张量。

若上标与上标，或下标与下标缩并，结果不再是张量。

用并矢记法时，上标 i 与下标 j 缩并可看成对并矢中的基矢 $\mathbf{g}_i$ 与 $\mathbf{g}^j$ 作点积，而 $\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^j = \delta^j_i$。对进行缩并的张量**T**采用记号 $\overset{\frown}{\mathbf{T}}$，例如下式为**T**张量对指标 j 和 s 缩并

$$\overset{\frown}{\mathbf{T}} = T^{ijk}{}_{rst}\sqrt{g}^{-q}\mathbf{g}_i\overset{\frown}{\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}^r\mathbf{g}^s}\mathbf{g}^t$$

$$= T^{ijk}{}_{rst}\sqrt{g}^{-q}\delta^s_j\mathbf{g}_i\mathbf{g}_k\mathbf{g}^r\mathbf{g}^t$$

$$= T^{ijk}{}_{rjt}\sqrt{g}^{-q}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_k\mathbf{g}^r\mathbf{g}^t$$

$$=s^{ik}{}_{rt}\sqrt{g}^{-q}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_k\mathbf{g}^r\mathbf{g}^t=\mathbf{s} \qquad (A4\cdot5b)$$

采用笛卡尔坐标系时，因上、下标没有区别，全部写为下标，故张量分量下标与下标缩并的结果仍为张量。

Ⅳ　**张量的内积**（Inner Product）

若两张量在并乘的过程中，一个张量的上标（或下标）与另一个张量的下标（或上标）进行缩并，则得到一新张量，其阶次为两张量阶次之和减一，此运算称为内积。

例如在并乘$A^{mn}B_r{}^s{}_t$中设m和r缩并，得

$$C^{ns}{}_t=A^{mn}B_m{}^s{}_t \qquad (A4\cdot6a)$$

用并矢记法时，内积是两张量基矢间的点积，并记为

$$\mathbf{A}\ \mathbf{B}=(A^{mn}\sqrt{g}^{-q_1}\mathbf{g}_m\mathbf{g}_n)(B_r{}^s{}_t\sqrt{g}^{-q_2}\mathbf{g}^r\mathbf{g}_s\mathbf{g}^t)$$

$$=A^{mn}B_r{}^s{}_t\sqrt{g}^{-(q_1+q_2)}\delta^r_m\mathbf{g}_n\mathbf{g}_s\mathbf{g}^t$$

$$=C^{ns}{}_t\sqrt{g}^{-(q_1+q_2)}\mathbf{g}_n\mathbf{g}_s\mathbf{g}^t \qquad (A4\cdot6b)$$

若点积是在两张量相邻的两基矢间进行，即如上例的$\mathbf{g}_n$与$\mathbf{g}^r$间进行，则记为$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(A^{mn}\sqrt{g}^{-q_1}\mathbf{g}_m\mathbf{g}_n)(B_r{}^s{}_t\sqrt{g}^{-q_2}\mathbf{g}^r\mathbf{g}_s\mathbf{g}^t)$$

$$=A^{mn}B_n{}^s{}_t\sqrt{g}^{-(q_1+q_2)}\mathbf{g}_m\mathbf{g}_s\mathbf{g}^t$$

$$=C^{ms}{}_t\sqrt{g}^{-(q_1+q_2)}\mathbf{g}_m\mathbf{g}_s\mathbf{g}^t \qquad (A4\cdot7)$$

两矢量的点积是两张量点积的特例。

若两张量的两对相邻基矢同时进行点积，则记为

$$\mathbf{A}:\mathbf{B}=(A^{ij}{}_{kl}\sqrt{g}^{-q_1}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l)(B^{pq}{}_{rs}\sqrt{g}^{-q_2}\mathbf{g}_p\mathbf{g}_q\mathbf{g}^r\mathbf{g}^s)$$

$$=A^{ij}{}_{kl}B^{kl}{}_{rs}\sqrt{g}^{-(q_1+q_2)}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^r\mathbf{g}^s$$

$$=C^{ij}{}_{rs}\sqrt{g}^{-(q_1+q_2)}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^r\mathbf{g}^s \qquad (A4\cdot8)$$

例如，线弹性应变比能$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}$可看成应力张量$\boldsymbol{\sigma}$和应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}$的双点积之半，即

$$W=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}(\sigma^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j)(\varepsilon_{kl}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l)$$

$$=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{kl}\delta^k_i\delta^l_j$$

$$=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij} \qquad (A4\cdot9)$$

设$\mathbf{T}$为二阶绝对张量，$\mathbf{a}$为一矢量，则$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}$为一新矢量$\mathbf{b}$

$$\mathbf{b}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}=\left(T^{i}_{\cdot j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j\right)\cdot\left(a^k\mathbf{g}_k\right) \qquad (A4\cdot10a)$$

$$=T^{i}_{\cdot j}a^j\mathbf{g}_i$$

$$=b^i\mathbf{g}_i$$

$$b^i=T^{i}_{\cdot j}a^j \qquad (A4\cdot10b)$$

这时T起着线性变换的作用，也称仿射变换，而T称为仿射量。

V. **张量商律（Quotient Rule）**

两张量的并乘或内积是张量，现问，若在每一个坐标系中均有 n^3 个的一组量 $A(i,j,k)$，它与任意张量 $B_j{}^{kl}$ 的积仍为张量 $C_i{}^l$，即

$$A(i,j,k)\,B_j^{kl}=C_i{}^l$$

那么 $A(i,j,k)$ 是否张量？只要证明当坐标变换时 $A(i,j,k)$ 按张量变换律变换即可。

证明：在新坐标系 $\{x^{i'}\}$ 中有

$$A(i',j',k')\,B_{j'}{}^{k'l'}=C_{i'}{}^{l'}$$

由此得
$$A(i',j',k')\beta^{j}_{j'}\,\beta^{k'}_{k}\,\beta^{l'}_{l}\,B^{kl}_{j}=\beta^{i}_{i'}\,\beta^{l'}_{l}C_i{}^l=\beta^{i}_{i'}\,\beta^{l'}_{l}A(i,j,k)B_j{}^{kl},$$

或
$$\left[A(i',j',k')\,\beta^{j}_{j'}\,\beta^{k'}_{k}-\beta^{i}_{i'}A(i,j,k)\right]\beta^{l'}_{l}B_j{}^{kl}=0$$

由于 $B_j{}^{kl}$ 为任意张量，故得

$$A(i',j',k')\beta^{j}_{j'}\,\beta^{k'}_{k}=\beta^{i}_{i'}A(i,j,k)$$

两边乘 $\beta^{m'}_{j}\,\beta^{k}_{n'}$ 得

$$A(i',j',k')\delta^{m'}_{j'}\,\delta^{k'}_{n'}=\beta^{i}_{i'}\,\beta^{m'}_{j}\,\beta^{k}_{n'}A(i,\ j,\ k)$$

或
$$A(i',\ m',n')=\beta^{i}_{i'}\,\beta^{m'}_{j}\,\beta^{k}_{n'}A(i,\ j,\ k)$$

可见分量 $A(i,\ j,\ k)$ 按二阶协变一阶逆变规律变换，因而 $A(i,\ j,\ k)$ 为三阶张量的二阶协变一阶逆变分量。

今后将经常用张量商律来判断某组量的张量性质，而不必每次去证明某组量是否符合张量的坐标变换规律。

现采用抽象记法。设A为张量，B为任意张量，则若

$$\mathbf{BP}=\mathbf{A},\ 或\ \mathbf{PB}=\mathbf{A},\ 或\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{A},\ 或$$

$$\overset{\frown}{\mathbf{B}\ \cdot\ \mathbf{P}}=\mathbf{A},\ \cdots$$

则P为张量。也即若某量P与任意张量并乘或内积后仍为张量，则P必为张量。

§5 Christoffel符号与张量导数

设在 n 维空间某区域中各点处定义有张量

$$\mathbf{T}=T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\sqrt{g}^{-w}\mathbf{g}_i\cdots\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\cdots\mathbf{g}^l \tag{A5·1}$$

一般地说，它是空间点位置$\{x^i\}$和时间 t 的函数。若固定时间，研究张量场随空间点位置变化的情况，就要研究张量的导数。

首先注意到，张量协变和逆变分量对坐标x^j的偏导数不再是张量的分量。设有一阶张量逆变分量$T^i(x^j)$，由张量变换律有

$$T^{i'}=T^{i'}(x^{j'})=T^k\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k},$$

对坐标$x^{j'}$求偏导可得

$$\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}}=\frac{\partial T^k}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}}\cdot\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}+T^k\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}。$$

若右边第二项为零，则$\dfrac{\partial T^k}{\partial x^p}$就是二阶张量的混变分量，这只在笛卡尔坐标系下才成立。对一般曲线坐标系，因为$\dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k\partial x^q}\neq 0$，张量分量的偏导数就不再是张量的分量。这给张量的运算带来不便。我们希望对张量方程求导的结果仍是张量方程，为此必须定义一种称为协变导数的微分运算，使张量分量的协变导数仍是张量。

Ⅰ. Christoffel 符号

先求基矢的导数。基矢的导数仍为矢量，可将其写为

$$\frac{\partial\mathbf{g}_m}{\partial x^n}=\Gamma^j_{mn}\mathbf{g}_j=\Gamma_{mnj}\mathbf{g}^j \tag{A5·2}$$

这里，Γ_{mnj}和Γ^j_{mn}分别称为第一类和第二类 Christoffel 符号，以下简称为C符号。有的作者也将第一和第二类C符号分别记为$[mn,j]$和$\left\{{j \atop mn}\right\}$。由于

$$\frac{\partial\mathbf{g}_m}{\partial x^n}=\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^m}\right)=\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^n}\right)=\frac{\partial\mathbf{g}_n}{\partial x^m} \tag{A5·3}$$

可得

$$\Gamma^j_{mn}=\Gamma^j_{nm} \tag{A5·4a}$$

$$\Gamma_{mnj}=\Gamma_{nmj} \tag{A5·4b}$$

即第一类C符号关于前两个下标对称，而第二类C符号关于两个下标对称。

为求Γ_{mnj}和Γ^j_{mn}，将度量张量对坐标求偏导数，并记住式(A2·10)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^j}&=\frac{\partial}{\partial x^j}(\mathbf{g}_m\cdot\mathbf{g}_n)=\mathbf{g}_m\cdot\frac{\partial\mathbf{g}_n}{\partial x^j}+\frac{\partial\mathbf{g}_m}{\partial x^j}\cdot\mathbf{g}_n\\&=\Gamma_{njk}\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}_m+\Gamma_{mjk}\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}_n\\&=\Gamma_{njm}+\Gamma_{mjn}\end{aligned} \tag{A5·5}$$

循环置换下标得

$$\frac{\partial g_{nj}}{\partial x^m}=\Gamma_{jmn}+\Gamma_{nmj}$$

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^n}=\Gamma_{mnj}+\Gamma_{jnm}$$

将上两式相加，然后减去式(A5·5)即得

$$\Gamma_{mnj}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{nj}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^n}-\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^j}\right) \qquad (A5\cdot 6)$$

即第一类C符号是度量张量偏导数的函数。将式(A5·2)点积$\mathbf{g}^k$得

$$\Gamma_{mn}^k=g^{jk}\Gamma_{mnj} \quad 。 \qquad (A5\cdot 7a)$$

将式(A5·6)代入上式即得第二类C符号的表达式

$$\Gamma_{mn}^k=\frac{1}{2}\,g^{jk}\left(\frac{\partial g_{nj}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^n}-\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^j}\right)。 \qquad (A5\cdot 7b)$$

若将式(A5·2)点积$\mathbf{g}_k$即得

$$\Gamma_{mnk}=\Gamma_{mn}^j g_{jk} \qquad (A5\cdot 8)$$

由式(A5·7a)和(A5·8)可见，可通过度量张量升降C符号的第三个指标。

虽然C符号可通过度量张量升降第三个指标，但它不是张量的分量。事实上通过计算$\frac{\partial g_{m'n'}}{\partial x^{k'}}$不难求得$\Gamma_{m'n'k'}$的坐标变换律为

$$\Gamma_{m'n'k'}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{n'k'}}{\partial x^{m'}}+\frac{\partial g_{m'k'}}{\partial x^{n'}}-\frac{\partial g_{m'n'}}{\partial x^{k'}}\right)$$

$$=\frac{\partial x^p}{\partial x^{m'}}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x^{n'}}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\Gamma_{pqr}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{m'}\partial x^{n'}}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}}g_{pq} \qquad (A5\cdot 9)$$

可见Γ_{pqr}不服从张量分量的坐标变换律。

现求逆变基矢的偏导数。由 $\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^j=\delta_i^j$得：

$$\mathbf{g}_{i,k}\cdot\mathbf{g}^j+\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^j{}_{,k}=0 \quad 。$$

如§1中所规定，下标“$,k$”表对x^k求偏导数。由上式得

$$\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^j{}_{,k}=-\mathbf{g}_{i,k}\cdot\mathbf{g}^j=-\Gamma_{ik}^n\,\mathbf{g}_n\cdot\mathbf{g}^j$$

$$=-\Gamma_{ik}^j \quad ,$$

由此即得 $$\frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial x^k}=-\Gamma_{ik}^j\,\mathbf{g}^i。 \qquad (A5\cdot 10)$$

例5.1 证明 $\Gamma_{pq}^p=\frac{\partial}{\partial x^q}\ln\sqrt{g}$ （A5·11a）

证： $$\frac{\partial g}{\partial x^m}=\frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\cdot\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} \quad , \qquad (a)$$

但由式($A1\cdot22$)及($A2\cdot17$)有

$$\frac{\partial g}{\partial g_{jr}}=G^{jr}=gg^{jr} \tag{b}$$

将(b)代入(a)式，并注意到式($A5\cdot5$)和($A5\cdot7a$)得

$$\frac{\partial g}{\partial x^m}=gg^{jr}(\Gamma_{mjr}+\Gamma_{mrj})$$

$$=g(\Gamma^j_{mj}+\Gamma^r_{mr})=2g\Gamma^j_{jm}, \text{（对 } j \text{ 求和）}$$

或 $$\Gamma^j_{jm}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m}=\frac{\partial}{\partial x^m}\ln\sqrt{g}$$

由此($A5\cdot11$)式得证。由式($A5\cdot11a$)我们可得

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^m}=\sqrt{g}\,\Gamma^j_{jm} \tag{A5·11b}$$

例5.2 求正交曲线坐标系中C符号的表达式。

对正交曲线坐标系，我们有当$i\neq j$时$g_{ij}=g^{ij}=0$及$g^{(ii)}=1/g_{(ii)}$，由此不难求得第一类和第二类C符号Γ_{ijk}和Γ^k_{ij}之值。

$$\Gamma_{jjj}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j}, \tag{A5·12a}$$

$$\Gamma_{jjk}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^k}, \tag{A5·12b}$$

$$\Gamma_{jkj}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^k}。 \tag{A5·12c}$$

以上三式对j不求和。当i、j、k各不相同时，

$$\Gamma_{ijk}=0。 \tag{A5·12d}$$

利用式($A5\cdot7a$)，我们又可由($A5\cdot12$)诸式求得：

$$\Gamma^j_{jj}=g^{mj}\Gamma_{jjm} \quad \text{（对 } m \text{ 求和，对 } j \text{ 不求和）}$$

$$=g^{jj}\Gamma_{jjj}=\frac{1}{g_{jj}}\Gamma_{jjj}$$

$$=\frac{1}{2g_{jj}}\cdot\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\ln\sqrt{g_{jj}}, \tag{A5·13a}$$

$$\Gamma^k_{jj}=g^{kk}\Gamma_{jjk} \quad \text{（对 } j \text{ 和 } k \text{ 不求和）}$$

$$=-\frac{1}{2g_{kk}}\cdot\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^k}, \tag{A5·13b}$$

$$\Gamma^j_{jk}=\frac{1}{2g_{jj}}\cdot\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^k}。 \tag{A5·13c}$$

以上三式对j和k不求和。当i、j、k各不相同时，

$$\Gamma_{ij}^{k} = 0 \tag{A5·13d}$$

Ⅱ. 协变导数（Covariant Derivative）

现求矢量V对坐标x^j的偏导数。设有矢量场

$$\mathbf{V} = v^i \mathbf{g}_i = v_i \mathbf{g}^i \tag{A5·14}$$

则得

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\mathbf{g}_i + v^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}$$

利用式(A5·2)，上式代为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\mathbf{g}_i + v^i \Gamma_{ij}^{k}\mathbf{g}_k$$

$$= \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v^i \Gamma_{ij}^{k}\right)\mathbf{g}_k = \nabla_j v^k \mathbf{g}_k \tag{A5·15a}$$

式中$\nabla_j v^k$为矢量$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j}$在坐标线切线方向之分量，称为一阶逆变分量$v^k$的协变导数。

$$\nabla_j v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v^i \Gamma_{ij}^{k}。 \tag{A5·15b}$$

利用式(A5·10)由(A5·14)式的第二等式我们同样可得

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\mathbf{g}^i + v_i \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\mathbf{g}^i - v_i \Gamma_{jk}^{i}\mathbf{g}^k$$

$$= \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} - v_i \Gamma_{jk}^{i}\right)\mathbf{g}^k = \nabla_j v_k \mathbf{g}^k, \tag{A5·16a}$$

式中$\nabla_j v_k$为矢量$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j}$在逆变基矢$\mathbf{g}^k$方向（在三维空间情况即为坐标面之法线方向）上之分量，称为一阶协变分量v_k的协变导数，

$$\nabla_j v_k = \frac{\partial v_k}{\partial x^j} - v_i \Gamma_{jk}^{i}。 \tag{A5·16b}$$

有的作者将协变导数的运算符"∇_j"用一竖加下标"$|_j$"表示，即$\nabla_j v^k$和$\nabla_j v_k$分别表为$v^k|_j$和$v_k|_j$。

在笛卡尔坐标系情况下，因$g_{ij} = \delta_{ij}$，$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^{k} = 0$，故普通偏导数即为协变导数。而在曲线坐标系下，两者则不同。

可以证明，$\nabla_j v_k$为二阶张量的协变分量，而$\nabla_j v^k$为二阶张量的混变分量。事实上

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^{q'}} = \nabla_{q'} v_{p'} \mathbf{g}^{p'}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} = \nabla_j v_i g^i \beta_{q'}^{j}$$

或

$$\nabla_{q'} v_{p'} \mathbf{g}^{p'} = \nabla_j v_i \beta_{q'}^{j} \mathbf{g}^i = \nabla_j v_i \beta_{q'}^{j} \beta_{p'}^{i} \mathbf{g}^{p'},$$

由$\{\mathbf{g}^{p'}\}$的线性独立性即得

$$\nabla_{q'} v_{p'} = \beta^{j}_{q'} \beta^{i}_{p'} \nabla_j v_i \tag{A 5·17a}$$

同样可证 $$\nabla_{q'} v^{p'} = \beta^{j}_{q'} \beta^{p'}_{i} \nabla_j v^i \tag{A 5·17b}$$

可见$\nabla_j v_i$和$\nabla_j v^i$满足二阶张量分量的坐标变换律。

显然矢量$\dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j}$不是张量，而

$$\nabla \mathbf{V} = \mathbf{g}^j \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j} = \nabla_j v^i \mathbf{g}^j \mathbf{g}_i = \nabla_j v_i \mathbf{g}^j \mathbf{g}^i \tag{A 5·18}$$

才是二阶张量，并称之为矢量$\mathbf{V}$的绝对微商。式中

$$\nabla = \mathbf{g}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{A 5·19}$$

为Hamilton算子。

可将求矢量之绝对微商之运算推广于高阶张量$\mathbf{T}$（见式(A 5·1)）并称

$$\nabla \mathbf{T} = \mathbf{g}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \mathbf{T} \tag{A 5·20}$$

为张量$\mathbf{T}$的绝对微商。不难证明$\nabla\mathbf{T}$的张量性质。记住坐标变换时张量$\mathbf{T}$的不变性，则有

$$\mathbf{g}^{r'} \frac{\partial}{\partial x^{r'}} \mathbf{T} = \beta^{r'}_{r} \mathbf{g}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{s}} \mathbf{T} \cdot \frac{\partial x^{s}}{\partial x^{r'}} = \beta^{r'}_{r} \beta^{s}_{r'} \mathbf{g}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{s}} \mathbf{T}$$

$$= \delta^{s}_{r} \mathbf{g}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{s}} \mathbf{T} = \mathbf{g}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{r}} \mathbf{T}, \tag{A 5·21}$$

由此证明了$\nabla\mathbf{T}$在坐标变换时之不变性，因而是张量，且为比$\mathbf{T}$高一阶的张量。现求绝对微商$\nabla\mathbf{T}$的分量

$$\nabla \mathbf{T} = \mathbf{g}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{r}} \mathbf{T} = \mathbf{g}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{r}} (T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} \sqrt{g}^{-W} \mathbf{g}_i \cdots \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \cdots \mathbf{g}^l)$$

$$= \mathbf{g}^{r} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x^{r}} (T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}) \sqrt{g}^{-W} \mathbf{g}_i \cdots \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \cdots \mathbf{g}^l +$$

$$+ T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} \frac{\partial}{\partial x^{r}} (\sqrt{g}^{-W}) \mathbf{g}_i \cdots \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \cdots \mathbf{g}^l +$$

$$+ T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} \sqrt{g}^{-W} \Big[\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^{r}} \cdots \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \cdots \mathbf{g}^l + \cdots + \mathbf{g}_i \cdots \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \cdots \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^{r}} \Big] \Big\}$$

利用式(A 5·11b)、(A 5·2)和(A 5·10)，上式化为

$$\nabla \mathbf{T} = \Big[\frac{\partial}{\partial x^{r}} (T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}) - W \Gamma_{s r}^{s} T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} + \Gamma_{r s}^{i} T^{s\cdots j}{}_{k\cdots l} + \cdots$$

$$+ \Gamma_{r s}^{j} T^{i\cdots s}{}_{k\cdots l} - \Gamma_{r k}^{s} T^{i\cdots j}{}_{s\cdots l} - \cdots$$

$$- \Gamma_{r l}^{s} T^{i\cdots j}{}_{k\cdots s} \Big] \sqrt{g}^{-W} \mathbf{g}^{r} \mathbf{g}_i \cdots \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \cdots \mathbf{g}^l$$

$$= (\nabla_r T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}) \sqrt{g}^{-W} \mathbf{g}^{r} \mathbf{g}_i \cdots \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \cdots \mathbf{g}^l \tag{A 5·22a}$$

式中

$$\nabla_r T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} = \frac{\partial}{\partial x^{r}} (T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}) - W \Gamma_{s r}^{s} T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$$

$$+\Gamma_{rs}^{i}T^{s\cdots j}{}_{k\cdots l}+\cdots+\Gamma_{rs}^{j}T^{i\cdots s}{}_{k\cdots l}$$

$$-\Gamma_{rk}^{s}T^{i\cdots j}{}_{s\cdots l}-\cdots-\Gamma_{rl}^{s}T^{i\cdots j}{}_{k\cdots s} \qquad (A5\cdot22b)$$

为张量 **∇T** 的分量，称为**T** 的分量 $T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$ 的协变导数。由式（$A5\cdot22b$）可见协变导数$\nabla_r T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$由以下几部分组成：（1）张量分量对坐标$x^r$的偏导数，（2）包含权的项，（3）与张量上标同数目的补充项，为C符号与张量分量的乘积取正号，每一项将张量分量上标之一替换为求和指标S，（4）与张量下标同数目的补充项，为C符号与张量分量的乘积取负号，每一项将张量分量下标之一替换为求和指标S。

可用度量张量将求协变导数的指标上升而称之为逆变导数。因此，张量分量$T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$的逆变导数为

$$\nabla^{s}T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}=g^{rs}\nabla_{r}T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}。 \qquad (A5\cdot23)$$

度量张量g_{ij}和g^{ij}的协变导数为零。按式($A5\cdot22b$)有

$$\nabla_k g_{ij}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{pj}\Gamma_{ik}^{p}-g_{ip}\Gamma_{jk}^{p} \qquad (c)$$

但由式($A5\cdot5$)有

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki}=g_{pj}\Gamma_{ik}^{p}+g_{pi}\Gamma_{jk}^{p}$$

将上式代入（c）式即得

$$\nabla_k g_{ij}=0 \qquad (A5\cdot24a)$$

同样可证

$$\nabla_k g^{ij}=0 \qquad (A5\cdot24b)$$

Eddington 张量$\in^{ijk}$和$\in_{ijk}$的协变导数也为零。注意到由式($A2\cdot30$)和($A5\cdot11b$)有

$$\frac{\partial\in^{ijk}}{\partial x^r}=e^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)=-e^{ijk}\frac{1}{g}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^r}=-e^{ijk}\frac{\Gamma_{sr}^{s}}{\sqrt{g}}$$

$$=-\in^{ijk}\Gamma_{sr}^{s} \qquad (d)$$

则得

$$\nabla_r\in^{ijk}=\frac{\partial\in^{ijk}}{\partial x^r}+\in^{sjk}\Gamma_{sr}^{i}+\in^{isk}\Gamma_{sr}^{j}+\in^{ijs}\Gamma_{sr}^{k}$$

上式中 s 为求和指标，且$i\neq j\neq k\neq i$，则右边后三项中的s只能分别取i、j、k之值。由此得

$$\nabla_r\in^{ijk}=\frac{\partial\in^{ijk}}{\partial x^r}+\in^{ijk}(\Gamma_{ir}^{i}+\Gamma_{jr}^{j}+\Gamma_{kr}^{k})$$

$$=\frac{\partial\in^{ijk}}{\partial x^r}+\in^{ijk}\Gamma_{sr}^{s}$$

$$=-\in^{ijk}\Gamma_{sr}^{s}+\in^{ijk}\Gamma_{sr}^{s}$$

$$=0 \qquad (A5\cdot25a)$$

同样可证

$$\nabla_r\in_{ijk}=0 \qquad (A5\cdot25b)$$

求张量分量协变导数的运算规则列举如下：

（1）设α和β为常数，则

$$\nabla_r(\alpha A^{ij}{}_{kl}+\beta B^{ij}{}_{kl})=\alpha\nabla_r A^{ij}{}_{kl}+\beta\nabla_r B^{ij}{}_{kl} \qquad (A5\cdot26)$$

（2）设$C^{ij}{}_k = A^{ij}B_k$，则

$$\nabla_r C^{ij}{}_k = \nabla_r (A^{ij}B_k)$$

$$= B_k \nabla_r A^{ij} + A^{ij}\nabla_r B_k \qquad (A5\cdot27)$$

事实上

$$\nabla_r(A^{ij}B_k) = \frac{\partial}{\partial x^r}(A^{ij}B_k) + A^{sj}B_k\Gamma_{rs}^{\ i} + A^{is}B_k\Gamma_{rs}^{\ j} - A^{ij}B_s\Gamma_{rk}^{\ s}$$

$$= B_k\left(\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^r} + A^{sj}\Gamma_{rs}^{\ i} + A^{is}\Gamma_{rs}^{\ j}\right) + A^{ij}\left(\frac{\partial B_k}{\partial x^r} - B_s\Gamma_{rk}^{\ s}\right)$$

$$= B_k\nabla_r A^{ij} + A^{ij}\nabla_r B_k$$

（3）指标缩并和求协变导数的先后次序可以互换。事实上，若先求协变导数，再缩并，则由式($A5\cdot27$)得 $\nabla_r(A^{ik}B_k) = B_k\nabla_r A^{ik} + A^{ik}\nabla_r B_k$

若先缩并，再求协变导数，则得：

$$\nabla_r(A^{ik}B_k) = \frac{\partial}{\partial x^r}(A^{ik}B_k) + A^{sk}\ B_k\ \Gamma_{sr}^{\ i}$$

$$= A^{ik}\frac{\partial B_k}{\partial x^r} + B_k\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^r} + A^{sk}B_k\Gamma_{sr}^{\ i} + A^{is}B_k\Gamma_{sr}^{\ k} - A^{is}B_k\Gamma_{sr}^{\ k}$$

$$= A^{ik}\left(\frac{\partial B_k}{\partial x^r} - B_s\Gamma_{kr}^{\ s}\right) + B_k\left(\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^r} + A^{sk}\Gamma_{sr}^{\ i} + A^{is}\Gamma_{sr}^{\ k}\right)$$

$$= A^{ik}\nabla_r B_k + B_k\nabla_r A^{ik}$$

（4）在求协变导数时，度量张量g_{ij}、g^{ij}和Eddington张量可视为常数一样，可移出协变导数运算符之外或放入协变导数运算符号之内。

Ⅲ．张量方程

张量方程是同型张量或同型张量分量之和等于零的等式。张量方程必须满足方程中所有各项物理量纲与指标量纲的一致，即其每一项必须有相同的张量特征。由于同型张量之和仍为同型张量，则张量方程就归结为某张量等于零，或某张量的所有分量等于零。利用张量的重要特性，即若张量的所有分量在一个坐标系中为零则它们在所有其它坐标系中也必全为零，我们只要证明张量方程在一个坐标系中成立，则必在所有其它坐标系中成立。这是张量方程的重要特性。利用这一特性，我们只要在一个坐标系例如笛卡尔坐标系中推得描述某自然规律的方程，然后将其转化成张量方程，就能适用于所有坐标系，而不必针对每一个坐标系重新推导反映此自然规律的方程。当然，我们也可在任意曲线坐标系中直接推导张量方程。

由于在笛卡尔坐标系下，协变导数即等于普通导数，因此我们可在笛卡尔坐标系下推导反映某自然规律的方程，然后适当移动各项指标的上、下位置，使各项保持指标量纲的一致，再将其中的偏导数换成协变导数，δ_{ij}、δ^{ij}和δ_j^i分别换成度量张量g_{ij}、g^{ij}和g_j^i，e_{ijk}、e^{ijk}分别换成$\in_{ijk}$、$\in^{ijk}$，基矢$\mathbf{i}_i$、$\mathbf{i}^i$换成$\mathbf{g}_i$、$\mathbf{g}^i$，这样就将笛卡尔坐标系下的方程换成了张量方程，因而可适用于任何坐标系。

下面举例说明这种推导张量方程的方法。笛卡尔坐标系下之平衡方程为

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i = 0,$$

化成张量方程为

$$\nabla_j \sigma^{ji} + \rho f^i = 0。 \tag{A5·28}$$

笛卡尔坐标系下之 Laplace 方程为

$$\phi_{,ii} = 0,$$

化成张量方程为

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j\phi = 0。 \tag{A5·29}$$

笛卡尔坐标系下之旋转量表达式为

$$\mathrm{curl}\mathbf{A} = e_{ijk}A_{k,j}\mathbf{i}_i,$$

化成张量形式为

$$\mathrm{curl}\mathbf{A} = \in^{ijk}\nabla_j A_k \mathbf{g}_i \tag{A5·30}$$

笛卡尔坐标系下的 Navier 方程为

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda+\mu)u_{k,ki} + \rho f_i = \rho a_i$$

化成张量方程为

$$\mu g^{kl}\nabla_k\nabla_l u^i + (\lambda+\mu)g^{il}\nabla_k\nabla_l u^k + \rho f^i = \rho a^i。 \tag{A5·31}$$

Ⅳ. 张量的物质导数

设有一连续物质域Ω，Ω中任一质点P的空间坐标，即质点在t瞬时的位置以x^i表之，

$$x^i = x^i(t)。 \tag{A5·32}$$

为了识别一个质点，我们可取$t=t_0$瞬时质点的坐标X^i作为标记质点的物质坐标，它是不随时间变化的。任一张量$\mathbf{T}$可写为质点物质坐标和时间的函数

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(X^i,\ t), \tag{A5·33}$$

称为物质描述。也可写为质点空间坐标和时间的函数

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(x^i,\ t), \tag{A5·34}$$

称为空间描述。在式(A5·33)和(A5·34)的右边的函数用同一个记号，但记住它们具有不同的函数形式，这点一般不会引起混淆。

张量

$$\mathbf{T} = T^{ij}{}_{kl}\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \tag{A5·35}$$

的物质导数是保持物质坐标X^i不变下对时间t求导数，它反映的是$\mathbf{T}$在某质点处的变化率，以符号$D\mathbf{T}/Dt$表之。设$\mathbf{T}$采用空间描述（式(A5·34)），则

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial x^r}\frac{dx^r}{dt} \tag{A5·36}$$

这里$\frac{dx^r}{dt}$是在X^i保持不变下x^r对时间求导数，为质点的速度v^r。根据式(A5·20)和(A5·22a)有

$$\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial x^r} = \nabla_r T^{ij}{}_{kl}\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \tag{A5·37}$$

式(A5·36)右边第一项是在空间坐标保持不变时对时间求偏导数，它描述空间某点的张量$\mathbf{T}$随时间的变化率，称为当地导数。而第二项是物质导数的迁移部分称为迁移导数，它是由不均匀的张量场$\mathbf{T}(x^i,\ t)$中质点的运动引起的。

将式(A5·35)和(A5·37)分别代入式(A5·36)右边的第一项和第二项中得

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt}=\left[\frac{\partial T^{ij}{}_{kl}}{\partial t}+v^r\ \nabla_r T^{ij}{}_{kl}\right]\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l$$

$$=\frac{DT^{ij}{}_{kl}}{Dt}\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l。\tag{A5·38}$$

式中
$$\frac{DT^{ij}{}_{kl}}{Dt}=\frac{\partial T^{ij}{}_{kl}}{\partial t}+v^r\nabla_r T^{ij}{}_{kl}\tag{A5·39}$$

称为张量分量 $T^{ij}{}_{kl}$ 的物质导数。

现举例说明式(A5.38)和(A5.39)的运用。质点的加速度**a**等于质点速度**V** 的物质导数。采用空间描述时有：

$$\mathbf{a}=\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\ v^r\ \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x^r}$$

$$=\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^r\nabla_r v^i\right)\mathbf{g}_i$$

$$=\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^i}{\partial x^r}+v^r v^s\ \Gamma_{rs}^{\ i}\right)\mathbf{g}_i$$

$$=\left(\frac{dv^i}{dt}+v^r v^s\Gamma_{rs}^{\ i}\right)\mathbf{g}_i.\tag{A5·40a}$$

由此得加速度的逆变分量为

$$a^i=\frac{Dv^i}{Dt}=\frac{dv^i}{dt}+v^r v^s\Gamma_{rs}^{\ i}\tag{A5·40b}$$

上式右边第一项等于

$$\frac{dv^i}{dt}=\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^i}{\partial x^r},\tag{A5·40c}$$

是由质点的速度分量随时间的变化引起的，而右边第二项是由坐标线的弯曲引起的。

同样可得加速度的协变分量为：

$$\mathbf{a}=\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\ v^r\nabla_r v_i\right)\mathbf{g}^i$$

$$=\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v^r\frac{\partial v_i}{\partial x^r}-v^r v_s\Gamma_{ri}^{\ s}\right)\mathbf{g}^i$$

$$=\left(\frac{dv_i}{\partial t}-v^r v_s\Gamma_{ri}^{\ s}\right)\mathbf{g}^i,\tag{A5·41a}$$

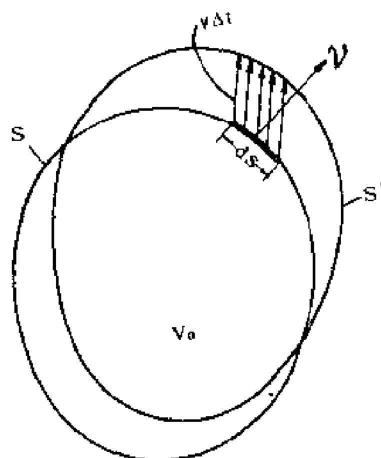
由此得
$$a_i=\frac{dv_i}{\partial t}-v^r v_s\ \Gamma_{ri}^{\ s}。\tag{A5·41b}$$

式中
$$\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v^r\frac{\partial v_i}{\partial x^r}。\tag{A5·41c}$$

现求张量分量体积分的物质导数。设 t 瞬时物质域Ω占有体积V 和界面S，在 t 瞬时张量分量$T^{ij}{}_{kl}$ 的体积分以 I 表之

$$I=\int_V T^{ij}{}_{kl}dV。\qquad (A5\cdot42)$$

在$t+\Delta t$瞬时，物质域Ω移动到新位置，并占有体积V'和界面S'（见图$A1$），而这时体积分I有了增量ΔI。此增量由两部分组成：一部分是V和V'占有的公共体积V_0中张量$T^{ij}{}_{kl}(x^i,t)$随时间的改变引起的；另一部分是当物质域Ω由V移动到V'时体积的改变引起的，设$\mathbf{v}$表物质界面S上的质点的速度，$\boldsymbol{\gamma}$为界面之单位外法线矢量，则原体积的改变为$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\gamma}\Delta t\,ds$，忽略高阶小量可得



图A1 物质域的移动

$$\Delta I=\int_{V_0}\frac{\partial T^{ij}{}_{kl}}{\partial t}\Delta t\,dV+\int_s T^{ij}{}_{kl}v^r\gamma_r\Delta t\,ds$$

取极限，得张量体积分的物质导数为

$$\frac{DI}{Dt}=\int_V\frac{\partial T^{ij}_{kl}}{\partial t}\,dV+\int_S T^{ij}{}_{kl}v^r\gamma_r\,ds \qquad (A5\cdot43)$$

利用Gauss定理将上式的面积分化为体积分后得

$$\frac{DI}{Dt}=\int_V\left[\frac{\partial T^{ij}{}_{kl}}{\partial t}+\nabla_r(T^{ij}{}_{kl}v^r)\right]dV \qquad (A5\cdot44a)$$

$$=\int_V\left[\frac{\partial T^{ij}{}_{kl}}{\partial t}+v^r\nabla_rT^{ij}{}_{kl}+T^{ij}{}_{kl}\nabla_rv^r\right]dV$$

$$=\int_V\left[\frac{DT^{ij}{}_{kl}}{Dt}+T^{ij}{}_{kl}\nabla_rv^r\right]dV \qquad (A5\cdot44b)$$

式($A5\cdot43$)、($A5\cdot44a$)和($A5\cdot44b$)是采用空间描述时张量分量$T^{ij}{}_{kl}(x^i,\ t)$的体积分的物质导数表达式的几种形式。

§6 Riemann- Christoffel张量、Riemann空间和Euclid空间

I. Riemann-Christoffel张量

协变导数与普通导数之间最明显的区别在于作多次求导运算时，一般说来其求导结果与求导次序有关。

现求矢量协变分量的二阶协变导数

$$\nabla_t\nabla_sB_r=\frac{\partial}{\partial x^t}(\nabla_sB_r)-\Gamma_{rt}^m\nabla_sB_m-\Gamma_{st}^m\nabla_mB_r$$

$$=\frac{\partial^2B_r}{\partial x^t\partial x^s}-\Gamma_{rs}^m\frac{\partial B_m}{\partial x^t}-B_m\frac{\partial\Gamma_{rs}^m}{\partial x^t}-\Gamma_{rt}^m\left(\frac{\partial B_m}{\partial x^s}-\Gamma_{ms}^pB_p\right)$$

$$-\Gamma_{st}^m\left(\frac{\partial B_r}{\partial x^m}-\Gamma_{rm}^pB_p\right)$$

$$
=\frac{\partial^2 B_r}{\partial x^t \partial x^s}-\Gamma_{rs}^{m}\frac{\partial B_m}{\partial x^t}-\Gamma_{rt}^{m}\frac{\partial B_m}{\partial x^s}-\Gamma_{st}^{m}\frac{\partial B_r}{\partial x^m}
$$

$$
-B_m\left(\frac{\partial \Gamma^m_{rs}}{\partial x^t}-\Gamma^p_{rt}\Gamma^m_{sp}-\Gamma^p_{st}\Gamma^m_{rp}\right) \qquad (A6\cdot 1)
$$

对换上式求导次序，即对换上式中指标S和 t 的位置，然后相减，利用 c 符号的对称性可得

$$
\nabla_t\nabla_s B_r-\nabla_s\nabla_t B_r=R^{p}{}_{rst}B_p \quad , \qquad (A6\cdot 2)
$$

式中
$$
R^p_{rst}=\frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^p_{rt}-\frac{\partial}{\partial x^t}\Gamma^p_{rs}+\Gamma^m_{rt}\Gamma^p_{ms}-\Gamma^m_{rs}\Gamma^p_{mt}。 \qquad (A6\cdot 3a)
$$

根据张量商律，此为四阶张量的分量，称为 Riemann-Christoffel 张量，以下简称为 R-C 张量，其分量只与度量张量有关。

若将指标 p 下移，得

$$
R_{prst}=g_{pm}R^m_{rst}
$$

$$
=g_{pm}\frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^m_{rt}-g_{pm}\frac{\partial}{\partial x^t}\Gamma^m_{rs}+\Gamma^m_{rt}\Gamma_{msp}-\Gamma^m_{rs}\Gamma_{mtp} \qquad (A6\cdot 3b)
$$

注意到式($A5\cdot 5$)，则

$$
g_{pm}\frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^m_{rt}=\frac{\partial}{\partial x^s}(g_{pm}\Gamma^m_{rt})-\Gamma^m_{rt}\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^s}
$$

$$
=\frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma_{rtp}-\Gamma^m_{rt}(\Gamma_{msp}+\Gamma_{spm})
$$

将上式代入式(a)得

$$
R_{prst}=\frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma_{rtp}-\frac{\partial}{\partial x^t}\Gamma_{rsp}+\Gamma^m_{rs}\Gamma_{ptm}-\Gamma^m_{rt}\Gamma_{psm} \qquad (A6\cdot 4a)
$$

将Γ_{rtp}和Γ_{rsp}之表达式代入上式右边头两项，上式化为

$$
R_{prst}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{pt}}{\partial x^s\partial x^r}+\frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x^t\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{ps}}{\partial x^t\partial x^r}-\frac{\partial^2 g_{rt}}{\partial x^s\partial x^p}\right)
$$

$$
+g^{mn}(\Gamma_{rsm}\Gamma_{ptn}-\Gamma_{rtm}\Gamma_{psn}) \qquad (A6\cdot 4b)
$$

由式($A6\cdot 4b$)直接得到R_{prst}的下列性质：

(1)对指标 p、r 反对称，对指标 s、t 也反对称，即

$$
R_{prst}=-R_{rpst}\ , \qquad (A6\cdot 5a)
$$
$$
R_{prst}=-R_{prts}\ ;
$$

(2)对pr与st为对称，即

$$
R_{prst}=R_{stpr}; \qquad (A6\cdot 5b)
$$

(3) $R_{prst}+R_{pstr}+R_{ptrs}=0$; $\qquad (A6\cdot 5c)$

(4) $p=r$ 或 $s=t$ 时其值为零：

$$
R_{ppst}=0, \qquad R_{prtt}=0; \qquad (A6\cdot 5d)
$$

(5)有 3 个或 4 个指标相同则其值为零

$$R_{prrr}=R_{rprr}=R_{rrpr}=R_{rrrp}=0,$$
$$R_{pppp}=0 \quad 。 \tag{A6·5e}$$

这样，不为零的相异的R_{prst}有以下三类：

（1）R_{ijij}有$C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$个，

（2）R_{ijkl}（四个下标全不同）有$2C_n^4=\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$个，

（3）R_{ijik}有$C_n^2(n-2)=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$个，

其中n为空间的维度。在三维空间中，不为零的R_{ijkl}的个数为

$$\frac{1}{2}\times3\times2+0+\frac{1}{2}\times3\times2\times1=6$$

即为$ijkl$的下列组合

1212，1313，2323，1213，2123，3132。

而在二维空间中，则只有$\frac{1}{2}\times2\times1+0+0=1$个，即$R_{1212}$ 。

通过直接验证可以证明R-C张量存在下列Bianchi恒等式

$$\nabla_m R^i_{\cdot jkl}+\nabla_k R^i_{\cdot jlm}+\nabla_l R^i_{\cdot jmk}\equiv 0 \tag{A6·6}$$

Ⅱ Riemann空间与Euclid空间

由式

$$ds^2=g_{ij}\cdot dx^i dx^j \tag{A6·7}$$

确定空间任意两无限接近的点之间距离的n维空间称为Riemann空间，并以符号R_n表之。在R_n空间中，无论怎样选择坐标系，其基矢组｛$\mathbf{g}_i$｝是逐点变化的，度量张量g_{ij}是空间点位置｛x^i｝的函数。因而C符号与R-C张量场不为零，根据式(A6·2)，矢量分量的二阶协变导数与求导次序有关。

若在空间中可以安置直线坐标系（仿射坐标系），其基矢组｛$\mathbf{g}_i$｝在空间各点处处相同，这样的n维空间称为Euclid空间，并以符号E_n表之。也即，对E_n空间而言，存在这样一一对应的变换$x^i=x^i(\bar{x}^j)$，在此变换下，度量张量$\overline{g}_{kl}=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^l}$为常量，而$ds^2=\overline{g}_{kl}\,d\bar{x}^k d\bar{x}^l$。由于常系数矩阵$[\overline{g}_{kl}]$是对称正定的，故总存在变换使度量张量矩阵化为对角阵，从而有

$$ds^2=h_i d\bar{y}_i^2, \qquad h_i>0 \tag{A6·8}$$

再经过伸缩变换$dy_i=\sqrt{h_i}\,d\bar{y}_i$，就得到笛卡尔坐标系中线元长度平方的表示式：

$$ds^2=dy_i dy_i \tag{A6·9}$$

这里y_i是E_n空间点的笛卡尔坐标，该坐标系中之度量张量$g_{ij}=\mathbf{I}_i\cdot\mathbf{I}_j=\delta_{ij}$（其中$\mathbf{I}_i$为笛卡尔坐标系之基矢），因而在笛卡尔坐标系中(R-C)张量的全部分量为零，根据张量的重要特性，在E_n空间的任何坐标系中R-C张量也必为零。这样，R-C张量为零是空间为Euclid空间的必要条件，而且也是充分条件。根据式(A6·2)可见，在Euclid空间中，矢量分量的二阶协变导数

与求导次序无关。

Euclid空间可安置直线坐标系，而Riemann空间只能安置曲线坐标系，因此可形象地称Euclid空间为平坦空间，而Riemann空间为弯曲空间、有曲率的空间。以二维空间为例，平面是容许直线坐标系的，因而是Euclid空间，而任意曲面是不能安置直线坐标系的，因而是Riemann空间。在微分几何中我们知道R-C张量就反映了曲面的高斯曲率，故R-C张量也称曲率张量。

显然，二维Riemann空间是三维Euclid空间的子空间，那么，是不是任何 n 维Riemann空间R_n都可看成是更高维的Euclid空间$E_m(m>n)$的子空间？回答是肯定的。

在决定子空间R_n中一点时，可应用某种曲线坐标系 $\{x^i\}$，而此子空间中的点在E_m空间中的笛卡尔坐标$(y^1, y^2, \cdots\cdots, y^m)$必是$(x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n)$的函数

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1, \cdots\cdots, x^n) \\ y^2 &= y^2(x^1, \cdots\cdots, x^n) \\ &\cdots\cdots \\ y^m &= y^m(x^1, \cdots\cdots, x^n) \end{aligned} \tag{A6·10}$$

在子空间中无限接近的两点之笛卡尔坐标差为

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}dx^k \qquad \begin{matrix} k=1, \cdots\cdots, n \\ i=1, \cdots\cdots, m \end{matrix} \tag{A6·11}$$

则此两点之距离平方为

$$\begin{aligned} ds^2 = dy^i dy^i &= \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial y^i}{\partial x^l}dx^k dx^l \\ &= g_{kl}dx^k dx^l \end{aligned} \tag{A6·12}$$

式中

$$g_{kl} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial y^i}{\partial x^l} \qquad \begin{matrix} i=1, \cdots\cdots, m \\ k, l=1, \cdots\cdots, n \end{matrix} \tag{A6·13}$$

是否可确定一个数m及m个函数$y^1(x^1, \cdots\cdots, x^n)$，$\cdots\cdots$，$y^m(x^1, \cdots\cdots, x^n)$而使式（A6·13）成立？其中$g_{kl}$看成是$x^i$的已知函数且适合对称条件$g_{kl}=g_{lk}$。由于对称性，式（A6·13）共有$\frac{1}{2}n(n+1)$个方程，而未知函数$y^i(x^j)$有$m$个，故可期望当$m=\frac{1}{2}n(n+1)$时方程（A6·13）可解。由此可见，$n$维Riemann空间$R_n$可放入$m=\frac{1}{2}n(n+1)$维Euclid空间$E_m$中。例如$R_2$空间可放入$E_3$空间中，而$R_3$空间可放入$E_6$空间中。

§7 微分算子和积分定理〔11〕〔59〕

I 微分算子

下面列出几种用微分算子定义的量或运算。在笛卡尔坐标系中，标量ϕ的梯度与Laplace运算及矢量V的散度与旋度分别为

$$\text{grad}\phi = \mathbf{i}_i\partial_i\phi, \tag{A7·1}$$

$$\nabla^2\phi = \partial_i\partial_i\phi, \tag{A7·2}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \partial_i v_i, \tag{A7·3}$$

$$\mathrm{curl}\mathbf{V} = e_{ijk}\mathbf{i}_i\partial_j v_k。 \tag{A7·4}$$

式中记号∂_r表对坐标x^r的偏导数

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial x^r} \tag{A7·5}$$

将上述定义推广于一般曲线坐标系时，只要将$\mathbf{i}_i$换成$\mathbf{g}_i$，e_{ijk}换成$\in_{ijk}$或$\in^{ijk}$，∂_r换成∇_r，并适当引进度量张量g_{ij}或g^{ij}以保证指标量纲的一致即可。于是得曲线坐标系下标量ϕ的梯度与Laplace运算及矢量$\mathbf{V}$的散度与旋度的定义如下：

$$\mathrm{grad}\phi = \mathbf{g}^i\nabla_i\phi = \mathbf{g}^i\partial_i\phi, \tag{A7·6}$$

（标量的协变导数等于普通导数）

$$\nabla^2\phi = g^{ij}\nabla_i\nabla_j\phi, \tag{A7·7}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \nabla_i v^i \tag{A7·8}$$

$$\mathrm{curl}\mathbf{V} = \in^{ijk}\mathbf{g}_i\nabla_j v_k \tag{A7·9a}$$

$$= \in_{ijk}g^{jr}\mathbf{g}^i\nabla_r v^k \tag{A7·9b}$$

引进Hamilton算子

$$\nabla = \mathbf{g}^r\partial_r \tag{A7·10}$$

并将其视为矢量，则上面各式可用Hamilton算子表示为

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \mathbf{g}^r\partial_r\phi \tag{A7·11}$$

$$\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \mathbf{g}^r\partial_r\cdot\mathbf{g}^s\partial_s\phi = \mathbf{g}^r\cdot\mathbf{g}^s\nabla_r(\partial_s\phi)$$

$$= g^{rs}\nabla_r(\partial_s\phi) \tag{A7·12}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \nabla\cdot\mathbf{V} = \mathbf{g}^r\cdot\partial_r\mathbf{V} = \mathbf{g}^r\cdot\mathbf{g}_k\nabla_r v^k = \nabla_r v^r \tag{A7·13}$$

$$\mathrm{curl}\mathbf{V} = \nabla\times\mathbf{V} = \mathbf{g}^r\times\partial_r\mathbf{V} = \mathbf{g}^r\times\mathbf{g}^s\nabla_r v_s = \in^{rst}\mathbf{g}_t\nabla_r v_s \tag{A7·14}$$

将上述定义推广于任意张量场

$$\mathbf{T}(x^i) = T^{ij}{}_{kl}\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \tag{A7·15}$$

得

$$\mathrm{grad}\mathbf{T} = \nabla\mathbf{T} = (\nabla_r T^{ij}{}_{kl})\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}^r\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \tag{A7·16}$$

$$= \mathbf{T}\text{的绝对微商},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \nabla\cdot\mathbf{T} = \mathbf{g}^r\cdot\partial_r\mathbf{T} = \mathbf{g}^r\cdot\nabla_r T^{ij}{}_{kl}\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l$$

$$= \nabla_r T^{rj}{}_{kl}\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \tag{A7·17}$$

$$\mathrm{curl}\mathbf{T} = \nabla\times\mathbf{T} = \mathbf{g}^r\times\partial_r\mathbf{T} = \mathbf{g}^r\times\nabla_r T^{ij}{}_{kl}\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l$$

$$= \mathbf{g}^r\times\nabla_r T_{ij}{}^{kl}\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l$$

$$= \in^{rit}\nabla_r T_{ij}{}^{kl}\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_t\mathbf{g}^j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l \tag{A7·18}$$

$$\nabla^2\mathbf{T} = \nabla\cdot\nabla\mathbf{T} = g^{rs}\partial_r(\partial_s\mathbf{T})$$

$$= g^{rs}\partial_r(\nabla_s T^{ij}{}_{kl}\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l)$$

$$= g^{rs}(\nabla_r\nabla_s T^{ij}{}_{kl})\sqrt{g}^{-W}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \tag{A7·19}$$

例如，应力张量$\mathbf{T}$的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\tau}=\mathbf{g}_j\nabla_r\tau^{rj}。\qquad (A7\cdot 20a)$$

于是平衡方程可写为 (A7·20b)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\tau}+\rho\mathbf{f}=0$$

II **积分定理.**

以下不加证明地列出几个积分定理。设V为某一空间域之体积，A为该体积之界面(封闭曲面)，$\boldsymbol{\gamma}$为界面之单位外法线矢量，ϕ为标量场，$\mathbf{u}$为矢量场，则有梯度定理、Gauss散度定理和旋转量定理：

(1)
$$\int_V \mathrm{grad}\phi dV=\int_A \phi\boldsymbol{\gamma}dA \qquad (A7\cdot 21a)$$

或
$$\int_V \partial_r\phi dV=\int_A \phi\gamma_r dA \qquad (A7\cdot 21b)$$

(2)
$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{u}dV=\int_A \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\gamma}dA \qquad (A7\cdot 22a)$$

或
$$\int_V \nabla_i u^i dV=\int_A u^k\gamma_k dA \qquad (A7\cdot 22b)$$

(3)
$$\int_V \mathrm{curl}\mathbf{u}dV=\int_A \boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{u}dA \qquad (A7\cdot 23a)$$

或
$$\int_V \in^{rsk}\mathbf{g}_k\nabla_r u_s dV=\int_A \in^{ijk}\gamma_i u_j\mathbf{g}_k dA \qquad (A7\cdot 23b)$$

设A为一不封闭的曲面，S为该曲面边界周线，$\boldsymbol{\gamma}$为曲面之单位外法线矢量，$\boldsymbol{\tau}$为边界周线S之切向单位矢量，则有Stokes环量定理

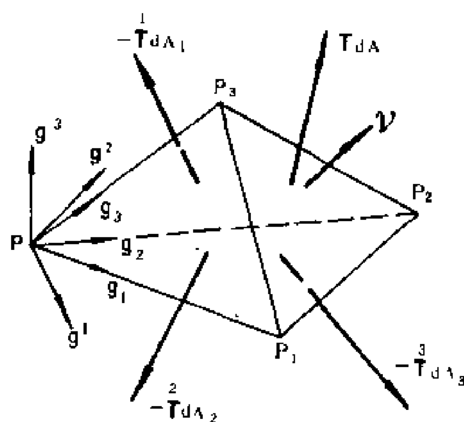
(4)
$$\int_A (\mathrm{curl}\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\gamma}dA=\oint_S \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau}ds \qquad (A7\cdot 24a)$$

或
$$\int_A \in^{rsk}\gamma_k\nabla_r u_s dA=\oint_s u^i\tau_i ds \qquad (A7\cdot 24b)$$

§8 张量分析在连续介质力学中的应用

下面简要介绍张量分析在连续介质力学中的某些应用。

I. **应力张量**



图A2 四面体上之应力

采用曲线坐标系。在连续介质域中任一点P处取由三个坐标面、一个任意倾斜面构成的微四面体$PP_1P_2P_3$，坐标系在P点处之三个基矢$\mathbf{g}_1$、$\mathbf{g}_2$、$\mathbf{g}_3$分别沿四面体之三个棱边PP_1、PP_2、PP_3。三个坐标面的外法线方向分别沿逆变基矢$\mathbf{g}^1$、$\mathbf{g}^2$、$\mathbf{g}^3$的负向，而斜面$P_1P_2P_3$的单位外法线矢量以$\boldsymbol{\gamma}$表之。设四面体斜面$P_1P_2P_3$上之应力矢量以$\mathbf{T}$表，而各坐标面上之应力分别以$-\overset{1}{\mathbf{T}}$，$-\overset{2}{\mathbf{T}}$，$-\overset{3}{\mathbf{T}}$表（加负号因这三个面为坐标面之负侧，参见4·2·11式）。设以dA和dA_1、dA_2、dA_3分别表示四面体斜面和各坐标面

面积之大小，则由四面体之平衡条件有(体力为高一阶的微量，略去)

$$\mathbf{T}dA-\overset{i}{\mathbf{T}}dA_i=0 \tag{A8·1}$$

为求得$\mathbf{T}$与$\overset{i}{\mathbf{T}}$间之关系须先建立四面体上各面积矢量$d\mathbf{A}$和$d\overset{i}{\mathbf{A}}$间的关系。由(图$A2$)得

$$\begin{aligned}2d\mathbf{A}&=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=(\overrightarrow{PP_2}-\overrightarrow{PP_1})\times(\overrightarrow{PP_3}-\overrightarrow{PP_1})\\&=\overrightarrow{PP_2}\times\overrightarrow{PP_3}+\overrightarrow{PP_3}\times\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_1}\times\overrightarrow{PP_2}\\&=2d\mathbf{A}_1+2d\mathbf{A}_2+2d\mathbf{A}_3\end{aligned} \tag{A8·2}$$

式中$d\mathbf{A}_1$、$d\mathbf{A}_2$、$d\mathbf{A}_3$之方向分别沿$\mathbf{g}^1$、$\mathbf{g}^2$、$\mathbf{g}^3$，故可写出

$$d\mathbf{A}_1=da_1\mathbf{g}^1,\qquad d\mathbf{A}_2=da_2\mathbf{g}^2,\qquad d\mathbf{A}_3=da_3\mathbf{g}^3 \tag{A8·3}$$

将上式代入式($A8$·2)得

$$d\mathbf{A}=da_i\mathbf{g}^i \tag{A8·4}$$

可见da_i实为矢量$d\mathbf{A}$的协变分量。由($A8$.4)式可得面元$d\mathbf{A}$面积之平方

$$dA^2=g^{ij}da_ida_j \tag{A8·5}$$

可见逆变度量张量g^{ij}起着度量面积之作用。

由式($A8$·4)可得坐标面各面元矢量$d\mathbf{A}_i$之物理分量，也即各面元之面积dA_i

$$dA_i=da_i\sqrt{g^{(ii)}}\ 。 \tag{A8·6}$$

注意到
$$d\mathbf{A}=dA\boldsymbol{\gamma}=dA\gamma_i\mathbf{g}^i, \tag{A8·7}$$

将上式与式($A8$·4)比较可得

$$da_i=\gamma_idA \tag{A8·8}$$

将($A8$·8)式代入($A8$·6)式即得所求的面积间之关系：

$$dA_i=\gamma_i\sqrt{g^{(ii)}}dA \tag{A8·9}$$

将上式代入式($A8$·1)得

$$\mathbf{T}=\gamma_i\sqrt{g^{(ii)}}\overset{i}{\mathbf{T}}=\gamma_i\boldsymbol{\tau}^i \tag{A8·10}$$

式中

$$\boldsymbol{\tau}^i=\sqrt{g^{(ii)}}\overset{i}{\mathbf{T}} \tag{A8·11}$$

注意到单位外法线矢量$\boldsymbol{\gamma}$之协变分量ν_i为

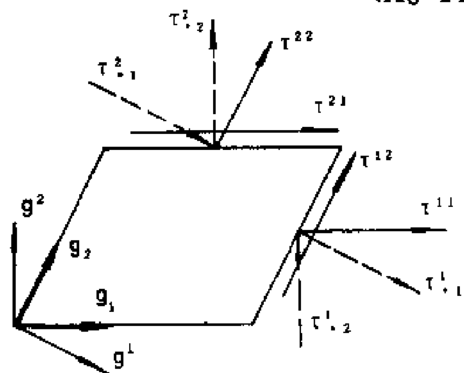
$$\gamma_i=\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{g}_i \tag{A8·12}$$

即得
$$\mathbf{T}=\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{g}_i\boldsymbol{\tau}^i=\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\tau} \tag{A8·13}$$

由于$\mathbf{T}$和$\boldsymbol{\gamma}$为一阶张量，故知$\boldsymbol{\tau}$为二阶张量，称为应力张量

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{g}_i\boldsymbol{\tau}^i=\tau^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j=\tau^i{}_j\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \tag{A8·14}$$

τ^{ij}为应力张量的二阶逆变分量，它是法线为$\mathbf{g}^i$的坐标面上沿$\mathbf{g}_j$方向之应力张量分量。而$\tau^i{}_j$为应力张量的混变分量，它是法线为$\mathbf{g}^i$的坐标面上沿$\mathbf{g}^j$方向上之应力张量分量(见图$A3$)



图$A3$　应力的张量分量

由式$(A8.13)$可得

$$T^j \mathbf{g}_j = \gamma_r \mathbf{g}^r \cdot \tau^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = \gamma_i \tau^{ij} \mathbf{g}_j$$

由此得 $T^j = \tau^{ij}\gamma_i$ $(A8 \cdot 15)$

此即曲线坐标系下Cauchy应力基本定理。式中T^j是外法线为$\boldsymbol{\gamma}$的面元上应力矢量$\mathbf{T}$的逆变分量。

利用公式 $\mathbf{T} = \gamma_i \tau^{ij} \mathbf{g}_j = \gamma_i \tau^{i}_{\cdot j} \mathbf{g}^j$ $(A8 \cdot 16)$

及$\mathbf{T}$的不变性，将其中的γ_i，$\mathbf{g}_j$和$\mathbf{g}^j$均化为物理分量，

$$\mathbf{T} = \left(\gamma_i \sqrt{g^{(ii)}}\right)\left(\tau^{ij}\sqrt{\frac{g_{(jj)}}{g^{(ii)}}}\right)\left(\frac{\mathbf{g}_j}{\sqrt{g_{(jj)}}}\right)$$

$$= \left(\gamma_i \sqrt{g^{(ii)}}\right)\left(\tau^{i}_{\cdot j}\sqrt{\frac{g^{(jj)}}{g^{(ii)}}}\right)\left(\frac{\mathbf{g}^j}{\sqrt{g^{(jj)}}}\right),$$

我们就得到应力张量的物理分量σ^{ij}和$\sigma^{i}_{\cdot j}$

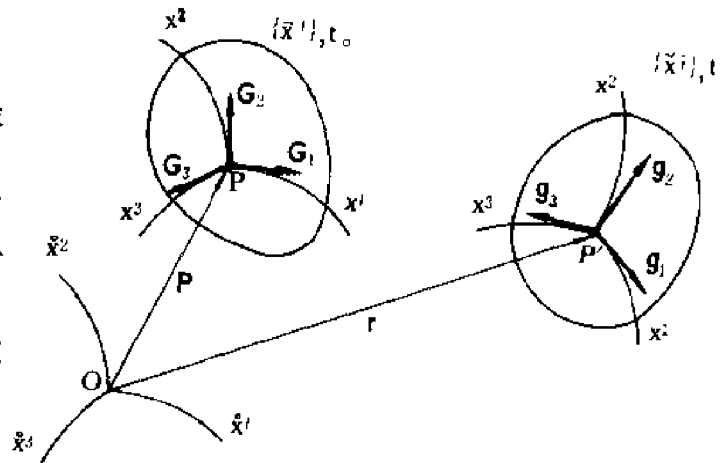
$$\sigma^{ij} = \tau^{ij}\sqrt{\frac{g_{(jj)}}{g^{(ii)}}}, \qquad (A8 \cdot 17a)$$

$$\sigma^{i}_{\cdot j} = \tau^{i}_{\cdot j}\sqrt{\frac{g^{(jj)}}{g^{(ii)}}}。 \qquad (A8 \cdot 17b)$$

此时σ^{ij}和$\sigma^{i}_{\cdot j}$具有应力的因次，但也仅在正交曲线坐标系下，此σ^{ij}和$\sigma^{i}_{\cdot j}$才具有我们通常的正应力和剪应力之意义，且有$\sigma^{i}_{\cdot j} = \sigma^{ij}$，这点只要记住在正交曲线坐标系下$i \neq j$时$g_{ij} = g^{ij} = 0$及$g^{(ii)} = 1/g_{(ii)}$即易证明。

Ⅱ. 应变张量

现采用拖带坐标系$\{x^\alpha\}$，即假设坐标线嵌入物体中，随物体变形而伸缩、旋转和弯曲，并保持各质点的坐标值x^i不变，但是坐标线的尺规变了。另取一固结于空间的不动参考系$\{\mathring{x}^i\}$，质点的位置矢径由该系原点出发而指向质点(图$A4$)。



图$A4$ 拖带坐标系

设变形前质点的位置矢径为

$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x^1, x^2, x^3, t_0)$， $(A8 \cdot 18)$

这里x^i为质点的拖带坐标。变形前的坐标基矢为

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^i}, \qquad (A8 \cdot 19)$$

因而度量张量为

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j。 \qquad (A8 \cdot 20)$$

变形后质点的位置矢径变为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3, t), \tag{A8·21}$$

因此变形后的坐标基矢为

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \tag{A8·22}$$

而度量张量变为

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j。 \tag{A8·23}$$

显然，物体的变形就反映在拖带坐标系的变形中，因而反映在度量张量的变化中。注意，虽然坐标值x^i不变，但坐标系发生变化。若变形前的坐标系以$\{\bar{x}^i\}$表（基矢$\mathbf{G}_i$），变形后的坐标系以$\{\tilde{x}^i\}$表（基矢$\mathbf{g}_i$），则两坐标系是互相关联的。若选定了$\{\bar{x}^i\}$系，则$\{\tilde{x}^i\}$系也就定了。反之也一样，两者只能任选一个。

变形前之线元为$d\mathbf{R}$，

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^i} dx^i = \mathbf{G}_i dx^i \tag{A8·24}$$

则变形前线元长之平方为

$$ds_0^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = G_{ij} dx^i dx^j \tag{A8·25}$$

变形后之线元为$d\mathbf{r}$，

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i = \mathbf{g}_i dx^i, \tag{A8·26}$$

变形后线元之平方为

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{ij} dx^i dx^j。 \tag{A8·27}$$

线元之变形可由下式度量

$$ds^2 - ds_0^2 = (g_{ij} - G_{ij}) dx^i dx^j = 2E_{ij} dx^i dx^j。 \tag{A8·28}$$

式中之E_{ij}为

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \tag{A8·29}$$

它为无因次量，反映质点邻域的相对变形，是二阶应变张量$\mathbf{E}$的协变分量。E_{ij}的张量性质可由式（A8·28）及张量商律得到，且为对称张量。

若以$\mathbf{u}$表质点的位移，则

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^i, t) = \mathbf{r} - \mathbf{R} \tag{A8·30}$$

由此得

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \mathbf{g}_i - \mathbf{G}_i, \tag{A8·31}$$

及

$$\mathbf{g}_{ij} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} + \mathbf{G}_i\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} + \mathbf{G}_j\right)$$

$$= G_{ij} + \mathbf{G}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} + \mathbf{G}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j}, \tag{A8·32a}$$

$$G_{ij} = \left(\mathbf{g}_i - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}\right)\left(\mathbf{g}_j - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j}\right)$$

$$= g_{ij} - \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} - \mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j}。 \qquad (A8 \cdot 32b)$$

由此得

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{G}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} + \mathbf{G}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} \right] \qquad (A8 \cdot 33a)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} + \mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} \right] \qquad (A8 \cdot 33b)$$

现以变形前之构形(坐标系 $\{\bar{x}^i\}$)为参考构形，将u向变形前之基矢分解，得

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{G}_i = u_i \mathbf{G}^i, \qquad (A8 \cdot 34a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \mathbf{G}_k \nabla_i u^k = \mathbf{G}^k \nabla_i u_k 。 \qquad (A8 \cdot 34b)$$

将($A8.34b$)式代入式($A8.33a$)，即得Green应变张量ε_{ij}，

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}[\nabla_j u_i + \nabla_i u_j + \nabla_i u^k \nabla_j u_k] \qquad (A8 \cdot 35)$$

若以变形后之构形(坐标系 $\{\tilde{x}^i\}$)为参考构形，将u向变形后之基矢分解，则得

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = u_i \mathbf{g}^i, \qquad (A8.36a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \mathbf{g}_k \nabla_i u^k = \mathbf{g}^k \nabla_i u_k \qquad (A8 \cdot 36b)$$

将式($A8.36b$)代入式($A8.33b$)，即得Almansi应变张量e_{ij}

$$e_{ij} = \frac{1}{2}[\nabla_j u_i + \nabla_i u_j - \nabla_i u^k \nabla_j u_k] \qquad (A8 \cdot 37)$$

现求瞬时(变形后) t 之应变速率 $\frac{\partial E_{ij}}{\partial t}$，并以瞬时 t 之构形($\{\tilde{x}^i\}$)为参考构形。

注意到

$$\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial G_{ij}}{\partial t} = 0, \qquad (A8 \cdot 38)$$

则由($A8 \cdot 29$)式得

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}。 \qquad (a)$$

质点 t 瞬时之速度v及其在变形后坐标基矢方向上的分解为

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \qquad (A8 \cdot 39a)$$

$$= v^k \mathbf{g}_k = v_k \mathbf{g}^k, \qquad (A8 \cdot 39b)$$

则得

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} \qquad (A8 \cdot 40a)$$

$$= \mathbf{g}_k \nabla_i v^k = \mathbf{g}^k \nabla_i v_k。 \qquad (A8 \cdot 40b)$$

由此得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial t} + \mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial t}$$

$$= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k \nabla_j v_k + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^k \nabla_i v_k$$

$$= \nabla_j v_i + \nabla_i v_j \quad (A8\cdot41)$$

将上式代入(a)式，即得质点在瞬时 t 之应变速率：

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) \quad (A8\cdot42)$$

上面用拖带坐标系推得的应变和应变率公式($A8\cdot35$)、($A8\cdot37$)和($A8\cdot42$)对一般曲线坐标系也同样成立。

Ⅲ、连续介质的守恒定律

下面我们不加推导地列出四个守恒定律的整体形式和局部形式的张量方程，它们适用于任何曲线坐标系，方程中的各量均为张量分量而非物理分量。

（一）质量守恒定律

物体之总质量在运动过程中保持不变。设ρ_0和V_0表初始时刻之密度和体积，ρ和 V 表任一瞬时 t 之密度和体积，则

$$M = \int_V \rho dV = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 \quad (A8\cdot43)$$

或

$$\frac{DM}{Dt} = \int_V \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_k v^k\right] dV = 0 \quad (A8\cdot44)$$

由此得连续性方程

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_k v^k = 0 \quad (A8\cdot45)$$

在质量守恒条件下，我们有

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\int_V \rho T^{ij}{}_{kl} dV &= \int_V \left[\frac{D}{Dt}(\rho T^{ij}{}_{kl}) + \rho T^{ij}{}_{kl} \nabla_r v^r\right] dV \\ &= \int_V \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_r v^r\right] T^{ij}{}_{kl} dV + \int_V \rho \frac{DT^{ij}{}_{kl}}{Dt} dV \\ &= \int_V \rho \frac{DT^{ij}{}_{kl}}{Dt} dV \quad (A8\cdot46)\end{aligned}$$

（二）线动量守恒定律

该物体瞬时 t 占有体积V，边界面为A，A之单位外法线矢量为$\mathbf{v}$。物体上作用有面力$\mathbf{T}$，单位质量的体力$\mathbf{f}$和体矩$\mathbf{b}$.动量守恒定律表明：物体动量对时间的变化率等于作用在物体上之外力之主向量，即

向量形式

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_A \mathbf{T} dA + \int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (A8\cdot47)$$

上式在任一单位平行矢量场$\mathbf{N}$方向上的投影为

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho v^i N_i dV = \int_A \tau^{ji} \nu_j N_i dA + \int_V \rho f^i N_i dV \quad (A8\cdot48)$$

上式可化为

$$\int_V (\nabla_j \tau^{ji} + \rho f^i - \rho \frac{Dv^i}{Dt}) N_i dV = 0 \quad (A8\cdot49)$$

局部形式，即$Euler$运动方程为：

$$\nabla_j \tau^{ji} + \rho f^i = \rho \frac{Dv^i}{Dt} \tag{A8·50}$$

（三）动量矩守恒定律

动量矩守恒定律表明：物体动量对坐标原点之矩之变化率等于作用在物体上之外力对坐标原点之矩。即

向量形式

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho(\mathbf{\gamma}\times\mathbf{v})dV = \int_V \rho(\mathbf{\gamma}\times\mathbf{f}) + \int_V \rho\mathbf{b}dV + \int_A (\mathbf{\gamma}\times\mathbf{T})dA \tag{A8·51}$$

上式在任一单位平行矢量场N方向上的投影为

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\in_{ijk} l^i v^j N^k dV = \int_V \rho\in_{ijk} l^i f^j N^k dV + \int_V \rho b_k N^k dV$$

$$+\int_V \in_{ijk} l^i \tau^{pj} \gamma_p N^k dA \tag{A8·52}$$

上式中，l^i不是坐标，而是质点位置矢径r之分量：

$$\mathbf{r} = l^i \mathbf{g}_i, \tag{b}$$

且有

$$\frac{Dl^i}{Dt} = v^i, \tag{c}$$

及

$$\nabla_j l^i = \delta^i_j \text{。} \tag{d}$$

式($A8.52$)可化为

$$\int_V (\rho b_k + \in_{ijk}\tau^{ij}) N^k dV = 0 \tag{A8·53}$$

局部形式为

$$\in_{ijk}\tau^{ij} + \rho b_k = 0 \tag{A8·54}$$

可见当有体矩时，应力张量不对称。

（四）热力学第一定律

设E表物体之总内能，e表单位质量之内能，K表物体之总动能，W表外界对物体所做之功，Q表输给物体之热量，h表热流密度矢量，$\dot{q}$表内热源单位时间单位质量提供的热量，ω为质点邻域的角速度矢量。热力学第一定律表明：外力对物体所做之功和输给物体之热量等于物体内能与动能之和。写成率的形式为（上加一点表对该量求物质导数）：

$$\dot{E} + \dot{K} = \dot{W} + \dot{Q} \tag{A8·55}$$

式中

$$\dot{E} = \frac{D}{Dt}\int_V \rho e dV = \int_V \rho\frac{De}{Dt}dV \tag{A8·56}$$

$$\dot{K} = \frac{D}{Dt}\int_V \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dV = \frac{D}{Dt}\int_V \frac{1}{2}\rho v^i v_i dV \tag{A8·57}$$

$$\dot{W}=\int_A \mathbf{T}\cdot\mathbf{v}dA+\int_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dV+\int_V \rho\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega}dV$$

$$=\int_A \tau^{ji}\gamma_j v_i dA+\int_V \rho f^i v_i dV+\int_V \rho b_i\omega^i dV \qquad (A8\cdot 58)$$

$$\dot{Q}=-\int_A \mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\gamma}dA+\int_V \rho\dot{q}dV$$

$$=-\int_A h^i\gamma_i dA+\int_V \rho\dot{q}dV \qquad (A8\cdot 59)$$

将式($A8\cdot56$)～($A8\cdot59$)代入式($A8\cdot55$)，利用Gauss定理将面积分化为体积分，再利用动量和动量矩定律可得

$$\int_V \rho\frac{De}{Dt}dV=\int_V(\tau^{ji}V_{ij}+\rho\dot{q}-\nabla_j h^j)dV \qquad (A8\cdot 60)$$

局部形式为

$$\rho\frac{De}{Dt}=\tau^{ji}V_{ij}+\rho\dot{q}-\nabla_j h^j \qquad (A8\cdot 61)$$

式中V_{ij}为形变率张量：

$$V_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_j v_i+\nabla_i v_j) \qquad (A8\cdot 62)$$

在绝热情况下得

$$\rho\frac{De}{Dt}=\tau^{ji}V_{ij} \qquad (A8\cdot 63)$$

附录B　各向同性张量与张量函数

§1　仿射量

二阶张量又称仿射量，若以**A**表之，则

$$\mathbf{A}=A^{i}{}_{.j}\mathbf{g}_{i}\mathbf{g}^{j} \tag{B1·1}$$

它与向量$\mathbf{V}=v^{k}\mathbf{g}_{k}$的点积（或称作用于向量）给出另一向量**u**

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}。 \tag{B1·2}$$

可把**A**看作一个算子或变换，它使空间的每一向量**V**与另一向量**u**对应，我们称**u**是变换**A**下**V**的映象。这种变换是线性变换，又称仿射变换。

两个或两个以上仿射量之和或点积，仍然是仿射量，并以$\mathbf{A}^{n}$表n个**A**的点积：

$$\mathbf{A}^{n}=\underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\cdots\cdots\cdot\mathbf{A}}_{n\text{个}\mathbf{A}} \tag{B1·3}$$

交换仿射量**A**（式(B1·1)）的分量的两个指标的前后位置所得的仿射量称为**A**之共轭仿射量，并以$\mathbf{A}^{*}$表之：

$$\mathbf{A}^{*}=A_{j}{}^{i}\mathbf{g}_{i}\mathbf{g}^{j} \tag{B1·4}$$

若$\mathbf{A}^{*}=\mathbf{A}$，则称**A**为对称仿射量。

对共轭仿射量，下列关系成立：

（1）设**a**与**b**为矢量，则

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}^{*}\cdot\mathbf{a}, \tag{B1·5}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}^{*}, \tag{B1·6}$$

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})^{*}=\mathbf{b}\mathbf{a}。 \tag{B1·7}$$

（2）设**A**与**B**为仿射量，则

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{*}=\mathbf{B}^{*}\cdot\mathbf{A}^{*}。 \tag{B1·8}$$

若仿射量**R**满足

$$\mathbf{R}^{*}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{*}=\mathbf{I} \tag{B1·9}$$

则称**R**为正交仿射量。上式中**I**为单位仿射量

$$\mathbf{I}=g^{ij}\mathbf{g}_{i}\mathbf{g}_{j}=\delta^{i}{}_{j}\mathbf{g}_{i}\mathbf{g}^{j}=g_{ij}\mathbf{g}^{i}\mathbf{g}^{j} \tag{B1·10}$$

对矢量作正交变换时，不改变矢量的模与矢量间的夹角。也即设**u**和**V**为矢量，则

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})^{2}=\mathbf{V}^{2} \tag{B1·11}$$

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{u})\cdot(\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{V} \tag{B1·12}$$

此不难由利用式(B1·9)得到证明。

若仿射量**A**的分量的行列式不为零：

$$\det\mathbf{A}=|A^{i}_{\cdot j}|\neq 0, \tag{B1·13}$$

则称**A**为正则仿射量。对正则仿射量，存在着逆仿射量$\mathbf{A}^{-1}$使得

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I} \tag{B1·14}$$

对于对称仿射量$\mathbf{A}$，若映象$\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}$与$\mathbf{V}$有相同的方向，即

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}=\lambda\mathbf{V} \tag{B1·15a}$$

则称此方向为$\mathbf{A}$之主向。上式可写为

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\cdot\mathbf{V}=0 \tag{B1·15b}$$

若要$\mathbf{V}$有非零解，则须

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \tag{B1·16a}$$

或

$$|A^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^{i}_{j}|=0 \tag{B1·16b}$$

上式展开得

$$\lambda^3-\mathrm{I}\lambda^2+\mathrm{II}\lambda-\mathrm{III}=0 \tag{B1·16c}$$

式中

$$\mathrm{I}=A^{i}_{\cdot i}, \tag{B1·17a}$$

$$\mathrm{II}=\frac{1}{2!}e_{ijk}e^{pqk}A^{i}_{\cdot p}A^{j}_{\cdot q}, \tag{B1·17b}$$

$$\mathrm{III}=\frac{1}{3!}e_{ijk}e^{pqr}A^{i}_{\cdot p}A^{j}_{\cdot q}A^{k}_{\cdot r}, \tag{B1·17c}$$

为$\mathbf{A}$的三个不变量。由于$\mathbf{A}$为对称仿射量，故λ有三个实根，称为$\mathbf{A}$的特征根（或称本征值），每一个特征根代入式（$B1.15b$）可求得对应的特征向量（或称本征矢量），当三个特征根互不相等时，其对应的三个特征向量相互正交。事实上若设λ_1、λ_2对应的特征向量分别为$\mathbf{V}_1$、$\mathbf{V}_2$，则由式（$B1.15a$）得

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}_1=\lambda_1\mathbf{V}_1,$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}_2=\lambda_2\mathbf{V}_2。 \tag{B1.18}$$

分别用$\mathbf{V}_2$和$\mathbf{V}_1$从左边点积上两式，并注意到$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}$即得

$$\mathbf{V}_2\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}_1=\lambda_1\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2$$
$$\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}_2=\mathbf{V}_2\cdot\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{V}_1=\mathbf{V}_2\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}_1=\lambda_2\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2$$

比较上两式即得

$$(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2=0 \tag{B1·19}$$

由上式可见，当$\lambda_1\neq\lambda_2$时有

$$\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2=0 \tag{B1·20}$$

即$\mathbf{V}_1$与$\mathbf{V}_2$正交。而当$\lambda_1=\lambda_2$时$\mathbf{V}_1$与$\mathbf{V}_2$相互夹角可以任意，就中总可选取$\mathbf{V}_1$与$\mathbf{V}_2$正交。于是对对称仿射量，总存在三个相互正交的主向。现取一新坐标系$\{x^{i'}\}$，使该坐标系的坐标线之切线方向沿该点处$\mathbf{A}$之主向，并以$\{\mathbf{g}_{i'}\}$表该坐标系之基矢。将特征向量$\mathbf{V}_i$正规化，使$\mathbf{V}_i=\mathbf{g}_{i'}$，于是$\mathbf{V}_i\cdot\mathbf{V}_j=\mathbf{g}_{i'}\cdot\mathbf{g}_{j'}=g_{i'j'}$，且$i'\neq j'$时$g_{i'j'}=0$。在新坐标系中，$\mathbf{A}=A^{i'}_{\cdot j'}\mathbf{g}_{i'}\mathbf{g}^{j'}$将此$\mathbf{A}$的表达式及特征值$\lambda_{k'}$对应的特征向量$\mathbf{g}_{k'}$代入式($B1·15a$)得

$$A^{i'}_{\cdot j'}\mathbf{g}_{i'}\mathbf{g}^{j'}\cdot\mathbf{g}_{k'}=\lambda_{k'}\mathbf{g}_{k'}$$

或 $$A^{i'}_{\cdot k'}\mathbf{g}_{i'}=\lambda_{k'}\mathbf{g}_{k'}$$

由此得 $$A^{i'}_{\cdot k'}=\lambda_{k'}\delta^{i'}_{k'} \quad \text{（对}k'\text{不求和）}$$

这说明在以特征向量为基矢构成的新坐标系中**A**的矩阵$[A^{i'}_{\cdot k'}]$为对角阵，且主对角线元素即为特征值。

若**V**是**A**之主向，则也是$\mathbf{A}^n$的主向，这里n为正整数。事实上从左边用**A**点积式($B1\cdot15a$)两边得

$$\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{V}=\lambda\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}=\lambda^2\mathbf{V}。$$

继续同样的运算即得

$$\mathbf{A}^n\cdot\mathbf{V}=\lambda^n\mathbf{V}$$

可见**V**也是$\mathbf{A}^n$的主向，且$\mathbf{A}^n$的特征值即为λ^n。

若**R**为正交仿射量，则称$\mathbf{B}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^*$与**A**相似，两相似仿射量有相同的特征根。事实上设λ为**B**之特征根，则有

$$|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}|=0$$

或 $$|\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^*-\lambda\mathbf{R}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{R}^*|=|\mathbf{R}|\,|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|\,|\mathbf{R}^*|=0$$

由式($B1\cdot9$)得$|\mathbf{R}|\neq0$，$|\mathbf{R}^*|\neq0$，故得

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$$

可见λ也为**A**之特征根，而特征根相同之仿射量也必相似。

§2 各向同性张量

若一个张量的分量值在所有不同取向的正交坐标系中是相同的，则称为各向同性张量。

若仿射量**A**为各向同性张量，则要求对任意的正交仿射量**R**下式恒成立：

$$\mathbf{A}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^* \tag{B2.1a}$$

或 $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{A} \tag{B2.1b}$$

将上式用矩阵表示则为

$$[A^{i}_{\cdot k}][R^{k}_{\cdot j}]=[R^{i}_{\cdot k}][A^{k}_{\cdot j}] \tag{B2.1c}$$

可以证明，二阶各向同性张量具有如下形式：

$$\mathbf{A}=a\mathbf{I} \tag{B2.2a}$$

式中a为任意常数。事实上由于**R**的任意性，我们可取

$$[R^{i}_{\cdot j}]=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

代入式($B2\cdot1c$)，得

$$\begin{pmatrix}-A^{1}_{\cdot1}&A^{1}_{\cdot2}&A^{1}_{\cdot3}\\-A^{2}_{\cdot1}&A^{2}_{\cdot2}&A^{2}_{\cdot3}\\-A^{3}_{\cdot1}&A^{3}_{\cdot2}&A^{3}_{\cdot3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A^{1}_{\cdot1}&-A^{1}_{\cdot2}&-A^{1}_{\cdot3}\\A^{2}_{\cdot1}&A^{2}_{\cdot2}&A^{2}_{\cdot3}\\A^{3}_{\cdot1}&A^{3}_{\cdot2}&A^{3}_{\cdot3}\end{pmatrix}$$

由此得：　$A^1_{\cdot 2} = A^2_{\cdot 1} = A^1_{\cdot 3} = A^3_{\cdot 1} = 0$

再取

$$[R^i_{\cdot j}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

又可得：　$A^3_{\cdot 2} = A^2_{\cdot 3} = 0$

即 $[A^i_{\cdot j}]$ 为对角阵。此时再分别取

$$[R^i_{\cdot j}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 和 \quad [R^i_{\cdot j}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

代入式($B2\cdot1c$)可得 $A^1_{\cdot 1} = A^2_{\cdot 2} = A^3_{\cdot 3} = a$。可见 $A^i_{\cdot j} = a\delta^i_j$，即

$$\mathbf{A} = a\delta^i_j \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j = a g^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = a g_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j \tag{B2·2b}$$

若**A**与**B**为二阶各向同性张量，则**A**与**B**并乘或再进行基矢换位所得的四阶张量也为各向同性张量。同型的这种张量只有三个是独立的，即

$$\delta^i_j \delta^k_l \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j \mathbf{g}_k \mathbf{g}^l = g^{ij} g^{kl} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}_k \mathbf{g}_l \ ,$$

$$\delta^i_k \delta^j_l \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \mathbf{g}^l = g^{ik} g^{jl} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}_k \mathbf{g}_l \ ,$$

$$\delta^i_l \delta^j_k \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \mathbf{g}^l = g^{il} g^{jk} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}_k \mathbf{g}_l \ .$$

故最一般的四阶各向同性张量为

$$\mathbf{E} = (\lambda g^{ij} g^{kl} + \mu g^{il} g^{jk} + \nu g^{ik} g^{jl}) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}_k \mathbf{g}_l . \tag{B2·3}$$

式中 λ、μ、ν 为常数。

§3　张量函数、各向同性张量函数

自变量是张量的函数称为张量函数，其函数值若为纯量，则称纯量值张量函数，若函数值为张量，则称为张量值张量函数。例如

$$N = f(\mathbf{T}, \mathbf{V}, Q) \tag{B3·1}$$

$$\mathbf{F} = f(\mathbf{T}, \mathbf{V}, Q) \tag{B3·2}$$

这里 N、Q 为纯量，**F**、**T**为仿射张量，**V**为矢量。

若对任意的正交仿射量**R**，下述关系成立

$$N = f(\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}^*, \mathbf{R}\cdot\mathbf{V}, Q) \tag{B3·3}$$

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}^* = f(\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}^*, \mathbf{R}\cdot\mathbf{V}, Q) \tag{B3·4}$$

其中函数形式 f 不变，则称为各向同性张量函数。

设选取坐标系 $\{\mathbf{g}_i\}$，在正交变换**R**下得到新坐标系 $\{\mathbf{g}_{i'}\}$，其中 $\mathbf{g}_{i'} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{g}_i$，$\mathbf{g}^{i'} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{g}^i$。则向量**V**在坐标系 $\{\mathbf{g}_i\}$ 中之分量 $\mathbf{V}\cdot\mathbf{g}^i (= v^i)$ 等于**V**的映象 $\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{V}$ 在坐标系 $\{\mathbf{g}_{i'}\}$ 中之分量

$\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{g}^{i\prime}(=\bar{v}^{i\prime})=\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{g}^i=\mathbf{V}\cdot\mathbf{g}^i$，而仿射量A在坐标系$\{\mathbf{g}_{i\prime}\}$中之分量$\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{g}_j(=A^i{}_j)$等于A的映象$\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^*$在坐标系$\{\mathbf{g}_{i\prime}\}$中之分量$\mathbf{g}^{i\prime}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{g}_{j\prime}(=\bar{A}^{i\prime}{}_{j\prime})=\mathbf{R}\cdot\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{g}_j$ $=\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{g}_j=\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{g}_j$，即在坐标系$\{\mathbf{g}_i\}$上观察V和A同在坐标系$\{\mathbf{g}_{i\prime}\}$上观察$\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}$和$\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^*$是相同的。若在两坐标系中函数的形式$f$也相同，则称此函数为各向同性张量函数。

例如，各向同性线弹性体的应变能函数与本构方程

$$W=f(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{B3·5}$$

与

$$\boldsymbol{\tau}=F(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{B3·6}$$

若$\boldsymbol{\varepsilon}$作任意正交变换$\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{R}^*$时，使应力也产生相同变换$\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{R}^*$，则函数形式$f$与$F$应保持不变，这要求E是各向同性张量，即E由式(B2.3)表达。将式(B3.6)写成分量形式为

$$\begin{aligned}\tau^{ij}&=E^{ijkl}\varepsilon_{kl}\\&=(\lambda g^{ij}g^{kl}+\mu g^{il}g^{jk}+\nu g^{ik}g^{jl})\varepsilon_{kl}\end{aligned}$$

由应变张量ε_{kl}的对称性可得$\mu=\nu$，由此

$$\begin{aligned}\tau^{ij}&=E^{ijkl}\varepsilon_{kl}\\&=[\lambda g^{ij}g^{kl}+\mu(g^{il}g^{jk}+g^{ik}g^{jl})]\varepsilon_{kl}\end{aligned} \tag{B3·7}$$

即独立的弹性常数只有两个，即λ和μ。

对各向异性体，E不是各向同性张量。

§4 各向同性张量函数的表示定理

设

$$\mathbf{S}=F(\mathbf{T}) \tag{B4·1}$$

为各向同性张量值张量函数，即对任意正交张量R均满足

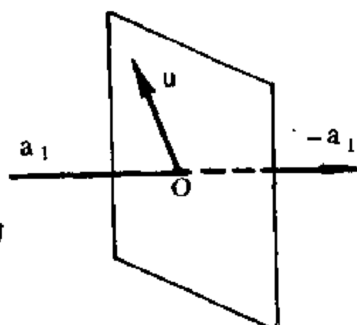
$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}^*=F(\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}^*) \tag{B4·2}$$

这里，S与T为对称仿射量。试求函数F的形式。

首先证明，T的主向也是S的主向。设$\mathbf{a}_1$为T的主向，其相应的主值（特征值）为λ_1，选择一正交变换R使得

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}_1=-\mathbf{a}_1\\&\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u},\quad 当\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_1=0时\end{aligned}\right\} \tag{B4·3}$$

此为相对于垂直于$\mathbf{a}_1$的平面的一个反射（图B1）。因为T是对称的，故（$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$）构成正交基矢。在该坐标基中，$[T^i{}_j]$为对角阵，而R的分量的矩阵$[R^i{}_j]$为



图B1　反射变换

$$[R^i{}_j]=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{a}$$

由此得$\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}^*=\mathbf{T}$，再由$\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}^*=F(\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}^*)=F(\mathbf{T})=\mathbf{S}$得$\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}=\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}$。于是有

$$\mathbf{R}\cdot(\mathbf{S}\cdot\mathbf{a}_1)=\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}_1=-(\mathbf{S}\cdot\mathbf{a}_1)$$

即变换R只使$\mathbf{S}\cdot\mathbf{a}_1$向量改变符号（指向）而不改变方位。而由式($B4.3$)可见，在变换R下只改变向量符号的方向只能是$\mathbf{a}_1$方向，可见$\mathbf{S}\cdot\mathbf{a}_1$与$\mathbf{a}_1$同向，即有

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{a}_1=\mu_1\mathbf{a}_1 \qquad (B4\cdot4)$$

这里μ_1为实常数，可见$\mathbf{a}_1$也是S的主向。因此T的每个主向也是S的主向。注意到相似张量的主值相同，反之主值相同的张量也必相似。于是一组主值λ_i规定了一类相似张量$\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}^*$，而由式($B4\cdot2$)可见此相似张量也确定了一类相似张量$\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}^*$，后者确定了一组主值$\mu_i$。故$\mu_i$为$\lambda_i$的函数，即

$$\mu_i=\mu_i(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \qquad (B4\cdot5)$$

注意到取主向为坐标轴时S与T成为对角阵，且主对角线元素S_i与T_i分别为μ_i与λ_i，即：

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}S_1&&\\&S_2&\\&&S_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1(T_1,T_2,T_3)&&\\&\mu_2(T_1,T_2,T_3)&\\&&\mu_3(T_1,T_2,T_3)\end{pmatrix}, \qquad (B4\cdot6)$$

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}T_1&&\\&T_2&\\&&T_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$$

作变换

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \qquad (b)$$

则由式（$B4\cdot2$）得

$$\overline{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}\overline{T}_1&&\\&\overline{T}_2&\\&&\overline{T}_3\end{pmatrix}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}^*=\begin{pmatrix}T_2&&\\&T_3&\\&&T_1\end{pmatrix} \qquad (c)$$

$$\overline{\mathbf{S}}=\begin{pmatrix}\overline{S}_1&&\\&\overline{S}_2&\\&&\overline{S}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1(\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3)&&\\&\mu_2(\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3)&\\&&\mu_3(\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1(T_2,T_3,T_1)&&\\&\mu_2(T_2,T_3,T_1)&\\&&\mu_3(T_2,T_3,T_1)\end{pmatrix}$$

$$=\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}^*=\begin{pmatrix}S_2&&\\&S_3&\\&&S_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_2(T_1,T_2,T_3)&&\\&\mu_3(T_1,T_2,T_3)&\\&&\mu_1(T_1,T_2,T_3)\end{pmatrix} \qquad (d)$$

由此得

$$S_2=\mu_2(T_1,T_2,T_3)=\mu_1(T_2,T_3,T_1)$$

当作变换

$$R=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad (e)$$

时，同样可得

$$S_3=\mu_3(T_1,T_2,T_3)=\mu_1(T_3,T_1,T_2)$$

即所有 **S** 之主值S_i都可用同一个函数$\mu_1=\mu$表示：

$$S_1=\mu(T_1,T_2,T_3) \qquad (B4\cdot7a)$$

$$S_2=\mu(T_2,T_3,T_1) \qquad (B4\cdot7b)$$

$$S_3=\mu(T_3,T_1,T_2) \qquad (B4\cdot7c)$$

只须在函数 μ 中对自变量下标作循环置换即可。

若再分别取以下的**R** 对($B4\cdot7$)诸式作变换：

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \qquad (f)$$

则可得

$$S_1=\mu(T_1,T_2,T_3)=\mu(T_1,T_3,T_2), \qquad (B4\cdot8a)$$

$$S_2=\mu(T_2,T_3,T_1)=\mu(T_2,T_1,T_3), \qquad (B4\cdot8b)$$

$$S_3=\mu(T_3,T_1,T_2)=\mu(T_3,T_2,T_1)。 \qquad (B4\cdot8c)$$

即只要在$S_1=\mu(T_1,T_2,T_3)$中T_2与T_1互换即得S_2，而T_3与T_1互换即得S_3。由此，当主值λ_i均不相同时，S_i的最一般形式为

$$S_i=\varphi_0+\varphi_1T_i+\varphi_2T_i^2 \qquad (i=1,2,3) \qquad (B4\cdot9)$$

式中φ_0、φ_1和φ_2为**T** 的主不变量Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ之函数，其中λ_1、λ_2、λ_3以对称形式出现。由于关于φ_0、φ_1、φ_2方程($B4\cdot9$)的系数行列式不为零，即

$$\begin{vmatrix}1&T_1&T_1^2\\1&T_2&T_2^2\\1&T_3&T_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}=(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)\neq0 \qquad (B4\cdot10)$$

故由式（$B4\cdot9$）可确定φ_0、φ_1、φ_2。

由于**S** 和**T**的主向相同，则（$B4\cdot9$）式可写成张量方程

$$\begin{pmatrix}S_1&&\\&S_2&\\&&S_3\end{pmatrix}=\varphi_0\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}+\varphi_1\begin{pmatrix}T_1&&\\&T_2&\\&&T_3\end{pmatrix}+\varphi_2\begin{pmatrix}T_1^2&&\\&T_2^2&\\&&T_3^2\end{pmatrix}$$

即

$$\mathbf{S}=\varphi_0\mathbf{I}+\varphi_1\mathbf{T}+\varphi_2\mathbf{T}^2 \qquad (B4\cdot11)$$

当**T**有两个主值相同时，行列式($B4\cdot10$)之值为零，则φ_0、φ_1、φ_2不能确定，式($B4\cdot11$)不成立。这时可取

$$\mathbf{S}=\varphi_0\mathbf{I}+\varphi_1\mathbf{T} \qquad (B4\cdot12)$$

而当**T**的三个主值均相同时，应有

$$\mathbf{S}=\varphi_0\mathbf{T} \qquad (B4\cdot13)$$

附录C　极分解定理

设F为实的n阶非奇异方阵

$$|\mathbf{F}| \neq 0, \tag{C1·1}$$

则它可唯一地分解为对称正定矩阵与正交矩阵之积或正交矩阵与对称正定矩阵之积，即

$$\mathbf{F}=\mathbf{VR}, \tag{C·2}$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{RU}。 \tag{C·3}$$

式中V和U为n阶对称正定矩阵，R为n阶正交矩阵。此称为极分解定理，下面给出此一定理的证明。

令

$$\mathbf{A}=\mathbf{F}^T\mathbf{F} \tag{C·4}$$

则A为实对称矩阵，故总存在一正交矩阵Q使得

$$\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{QAQ}^T \tag{C·5}$$

为对角阵。式中右上标“T”表转置。将式（C·4）代入上式得

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{A}}&=\mathbf{QF}^T\mathbf{FQ}^T=(\mathbf{QFQ}^T)^T(\mathbf{QFQ}^T)\\&=\overline{\mathbf{F}}^T\,\overline{\mathbf{F}},\end{aligned} \tag{C·6}$$

式中

$$\overline{\mathbf{F}}=\mathbf{QFQ}^T. \tag{C·7}$$

由式（C·6）得

$$\overline{F}_{ki}\overline{F}_{kj}\begin{cases}=0, & 当\ j\neq i\\ =\overline{A}_i, & 当\ j=i\end{cases} \tag{C·8}$$

这里$\overline{A}_i$为对角阵$\overline{\mathbf{A}}$的主对角线元素。根据式（C·7），$\overline{\mathbf{F}}$也是非奇异方阵，故有

$$\overline{A}_i=\overline{F}_{ki}\overline{F}_{ki}>0\quad，（对k求和，对i不求和） \tag{C·9}$$

由此得

$$|\overline{\mathbf{A}}|=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n>0 \tag{C·10}$$

即$\overline{\mathbf{A}}$为正定矩阵，因而根据式（C·5），A也为正定矩阵。

令

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}^2=\mathbf{F}^T\mathbf{F} \tag{C·11}$$

代入式（C·5）得

$$\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{QU}^2\mathbf{Q}^T=(\mathbf{QUQ}^T)(\mathbf{QUQ}^T)=\overline{\mathbf{U}}^2 \tag{C·12}$$

式中

$$\overline{\mathbf{U}}=\mathbf{QUQ}^T \tag{C·13}$$

也是对角阵，且主对角线元素$\overline{U}_i=\pm\sqrt{\overline{A}_i}$，不失一般性我们可取$\overline{U}_i$均为正值

$$\overline{U}_i = \sqrt{\overline{A}_i} > 0 \ , \qquad (C\cdot14)$$

则$\overline{\mathbf{U}}$为正定矩阵。于是由（C·13）式即证明了

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}^T \overline{\mathbf{U}} \mathbf{Q} \qquad (C\cdot15)$$

为正定对称方阵，其元素为

$$U_{ij} = Q_{ki} \overline{U}_{kl} Q_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Q_{ki} \overline{U}_k Q_{kj} \ 。 \qquad (C\cdot16)$$

现令

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} \ , \qquad (C\cdot17)$$

可证明$\mathbf{R}$为正交矩阵。事实上（注意到(C·11)式）

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{I}_{。} \qquad (C\cdot18)$$

由此就证明了极分解定理（C·3）式。同样可证明极分解定理（C·2）式。

现证明极分解（C·3）式的唯一性。设存在另一种分解

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}'\mathbf{U}' \qquad (C\cdot19)$$

则得

$$\mathbf{U}' = \mathbf{R}'^T\mathbf{F} = \mathbf{R}'^T\mathbf{R}\mathbf{U}$$

由此得

$$\mathbf{U}'^2 = \mathbf{U}'^T\mathbf{U}' = (\mathbf{U}\mathbf{R}^T\mathbf{R}')(\mathbf{R}'^T\mathbf{R}\mathbf{U})$$

$$= \mathbf{U}^2$$

可见

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U} \qquad (C\cdot20)$$

将上式代入式（C·19）即得$\mathbf{F} = \mathbf{R}'\mathbf{U}$，由此得

$$\mathbf{R}' = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{R}_{。} \qquad (C\cdot21)$$

于是证明了按（C·3）式的极分解是唯一的。同样可证明按式（C·2）的极分解的唯一性。

现证明，按式（C·2）和式（C·3）两种极分解的正交矩阵 $\mathbf{R}$ 是相同的。用反证法，设两种极分解的正交矩阵不同，即前(C·3)式

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\overline{\mathbf{R}}_{。} \qquad (C\cdot22)$$

上两式左乘$\overline{\mathbf{R}}^T$得

$$\overline{\mathbf{R}}^T\mathbf{F} = \overline{\mathbf{R}}^T\mathbf{R}\mathbf{U}, \qquad (C\cdot23)$$

$$\overline{\mathbf{R}}^T\mathbf{F} = \overline{\mathbf{R}}^T\mathbf{V}\overline{\mathbf{R}}_{。} \qquad (C\cdot24)$$

由式（C·24）可见（$\overline{\mathbf{R}}^T\mathbf{F}$）为正定对称阵，而根据极分解（$C$·3）式的唯一性它应等于$\mathbf{U}$，于是由（$C$·23）式得

$$\mathbf{U}=\overline{\mathbf{R}}^T\mathbf{R}\mathbf{U}$$

由此得

$$\overline{\mathbf{R}}^T\mathbf{R}=\mathbf{I}$$

从而得到

$$\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R} \tag{C·25}$$

这就证明两种极分解的正交矩阵R是相同的。

附录D Cayley-Hamilton定理

设A为n阶方阵，其特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}|=0。\quad (D\cdot1)$$

Cayley-Hamilton定理指出：方阵满足自己的特征方程，即

$$f(\mathbf{A})=0 \quad (D\cdot2)$$

证明（参见[52]）：令

$$f(\lambda)=|\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}-\cdots+(-1)^n a_n \quad (D\cdot3)$$

用$(\widetilde{\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}})$表矩阵$(\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A})$的伴随矩阵（指用矩阵所有元素之代数余子式构成之矩阵），则它的元素至多是λ的$n-1$次多项式，故可把$(\widetilde{\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}})$表为

$$(\widetilde{\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}})=\mathbf{B}_1\lambda^{n-1}+\mathbf{B}_2\lambda^{n-2}+\cdots+\mathbf{B}_{n-1}\lambda+\mathbf{B}_n\ , \quad (D\cdot4)$$

式中$\mathbf{B}_i$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）均为由常数组成的n阶方阵。由于

$$(\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A})(\widetilde{\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}})=\mathbf{I}\det(\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A})=\mathbf{I}\cdot f(\lambda), \quad (D\cdot5)$$

将（$D\cdot4$）式代入上式有

$$(\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{B}_1\lambda^{n-1}+\mathbf{B}_2\lambda^{n-2}+\cdots+\mathbf{B}_{n-1}\lambda+\mathbf{B}_n)=\mathbf{I}\cdot f(\lambda),$$

展开得

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}_1\lambda^n+(\mathbf{B}_2-\mathbf{A}\mathbf{B}_1)\lambda^{n-1}+(\mathbf{B}_3-\mathbf{A}\mathbf{B}_2)\lambda^{n-2}+\cdots+(\mathbf{B}_n-\mathbf{A}\mathbf{B}_{n-1})\lambda-\mathbf{A}\mathbf{B}_n\\&=\mathbf{I}\lambda^n-a_1\mathbf{I}\lambda^{n-1}+a_2\mathbf{I}\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\mathbf{I}\lambda+(-1)^n a_n\mathbf{I}\end{aligned} \quad (D\cdot6)$$

比较上式两边同次幂的λ的系数矩阵得

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}_1=\mathbf{I}\\&\mathbf{B}_2-\mathbf{A}\mathbf{B}_1=-a_1\mathbf{I}\\&\mathbf{B}_3-\mathbf{A}\mathbf{B}_2=a_2\mathbf{I}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\mathbf{B}_n-\mathbf{A}\mathbf{B}_{n-1}=(-1)^{n-1}a_{n-1}\mathbf{I}\\&-\mathbf{A}\mathbf{B}_n=(-1)^n a_n\mathbf{I}\end{aligned}$$

用$\mathbf{A}^n$、$\mathbf{A}^{n-1}$、$\cdots\mathbf{A}$、$\mathbf{I}$分别乘上面各式，然后相加，得

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}^n-a_1\mathbf{A}^{n-1}+a_2\mathbf{A}^{n-2}+\cdots+(-1)^n a_n\mathbf{I}=f(\mathbf{A})=\\&=\mathbf{A}^n\mathbf{B}_1+\mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{B}_2-\mathbf{A}\mathbf{B}_1)+\mathbf{A}^{n-2}(\mathbf{B}_3-\mathbf{A}\mathbf{B}_2)+\cdots\\&\quad+\mathbf{A}(\mathbf{B}_n-\mathbf{A}\mathbf{B}_{n-1})-\mathbf{A}\mathbf{B}_n=0\end{aligned}$$

这就证明了Cayley-Hamilton定理。利用此定理，对于$m\geqslant n$的$\mathbf{A}^m$，均可用$\mathbf{I}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{A}^2$，$\cdots$，$\mathbf{A}^{n-1}$表示。

附录E Carathéodory定理

设有n个独立变量y_i组成的n维Euclid空间，而

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=C=\text{const.} \tag{E·1}$$

为该空间中的超曲面，则

$$df=\frac{\partial f}{\partial y_i}dy_i=\text{grad}f\cdot \text{dy}=0 \tag{E·2}$$

这里grad$f$为f的梯度矢量，$d\mathbf{y}$为由方程（E·1）表达的曲面上的线元。式（E·2）表明过超曲面上任一点P而处于超曲面（E·1）上的线元$d\mathbf{y}$与过该点的梯度矢量正交。

令矢量

$$\mathbf{Y}(y_i)=\theta\text{grad}f \tag{E·3}$$

式中$\theta=\theta(y_1,y_2,\cdots,y_n)$为一标量因子，则矢量场$\mathbf{Y}$与曲面（$E$·1）正交。显然，过曲面上任一点$P$而与$\mathbf{Y}$正交的路径$d\mathbf{y}$均落在曲面$f$上。实际上若

$$\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{y}=0 \tag{E·4a}$$

或

$$Y_i\cdot dy_i=0 \tag{E·4b}$$

则由式（E·3）得路径$d\mathbf{y}$满足$df=0$，即$d\mathbf{y}$在曲面上。由此得出结论：设n维Euclid空间中有一超曲面（E·1），$\mathbf{Y}(y_i)$为该空间中的一矢量场，它与超曲面（E·1）正交，又设P为超曲面上的一点，而P'为P点无限小邻域内的但不在超曲面上的另一点，则不可能用满足（E·4）式的几何路径将P与P'点联结起来。

有趣的是存在着上述结论的逆定理，它由Carathéodory提出，并称之为Carathéodory定理。此定理在证明熵在不可逆热力学系统中作为状态函数存在的过程中起着关键性的作用。

Carathéodory定理：若n维Euclid空间中一点P的无限小邻域内存在着另一点P'，它不能用满足（E·4）式的几何路径与P点联结起来，则必存在一过P点的超曲面（E·1），所有满足（E·4）式的几何路径全落在此超曲面上。也即存在一积分分母$\theta(y_i)$和函数$f(y_i)$，使得

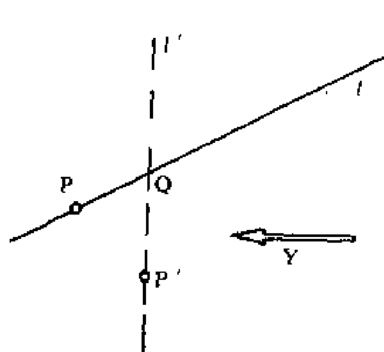
$$\frac{1}{\theta}\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{y}=df \tag{E·5}$$

或

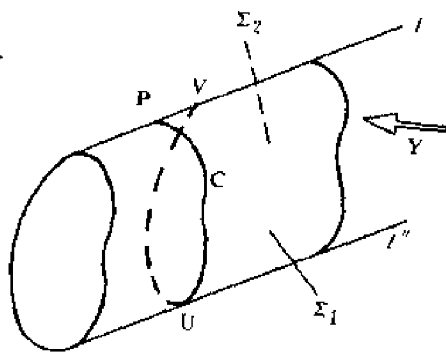
$$Y_i=\theta\frac{\partial f}{\partial y_i} \tag{E·6}$$

其中Y_i为矢量$\mathbf{Y}$的分量。

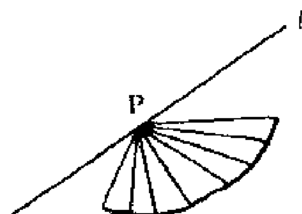
下面我们以三维Euclid空间为例给以简要证明。过P点画一直线l（图E1），在P点的邻域它不与$\mathbf{Y}$正交，若$d\mathbf{y}$为l的线元，则$\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{y}\neq 0$。过$P'$点画另一曲线$l'$，它在$P$点的邻域满足：(1) l'的线元$d\mathbf{y}$与$\mathbf{Y}$正交，即$\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{y}=0$，(2) l'位于由l与P'点确定的平面上。显然，在P点邻域l与l'不平行，且由于l'位于含l的平面上，故l'与l应相交于一点Q。点Q不能用满足式（E·4）的路径与P点联结起来，若不然则P'点就能用满足式（E·4）的几何路径与P点联结起来，这与前提假设矛盾。由于P'点无限接近P点，故Q点也无限接



图E 1　l 与Y不正交



图E 2　以 l 与 l″ 为母线的任意柱面



图E 3　过P点满足式（E·4）的曲线族构成一曲面$f(y_i)=C$。

近P点。

在P点邻域作另一直线l''平行于l（图$E2$）。令l与l''为任意的光滑柱面的母线，并分柱面为Σ_1（前柱面）和Σ_2(后柱面)两部分。在Σ_1上由P点出发作其线元$d\mathbf{y}$满足（E·4）式的曲线C，则曲线C是唯一的，此因$d\mathbf{y}$应与$\mathbf{Y}$正交，又必须在柱面Σ_1上，而柱面不与$\mathbf{Y}$正交，因此$d\mathbf{y}$的方向就确定了，仅可能相差一个符号。令曲线C与l''交于U点，并将曲线向Σ_2延伸最后又与l相交于V点，则V点必须与P点重合。因若不然，我们可将Σ_2连续变形使其趋于Σ_1，则UV就趋于UP，且V沿l趋于P点，但上面已证明V不能通过满足（E·4）式的几何路径（此时即 PUV 曲线）与P点连接起来，此矛盾仅在V与P重合的情况下才能解决。

现使光滑柱面Σ_1连续变形(但仍以l与l''为其母线)，就可产生过P点的满足式(E·4)的曲线族，它扫过唯一的曲面$f(y_i)=C$（常数）（见图$E3$），此曲面确定线性微分型（E·4）式的通过P点的积分，且因满足（E·4）式的曲线族的每一曲线在P点处与$\mathbf{Y}$正交，故曲面的梯度矢量$\mathrm{grad}f$在P点处之方向平行于$\mathbf{Y}$，因此有

$$\mathbf{Y}=\theta\,\mathrm{grad}f$$

式$\theta=\theta(y_i)$称为积分分母。由此得

$$\frac{1}{\theta}\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{y}=\mathrm{grad}f\cdot d\mathbf{y}=df$$

此即所要证明的。

上面的证明不难推广于n维Euclid空间。

习 题 答 案

2·6

(1) $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & a^2/2 & a\\ 0 & a & a^2/2\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{e}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{a^4-3a^2}{2(1-a^2)^2} & \dfrac{a}{(1-a^2)^2}\\ 0 & \dfrac{a}{(1-a^2)^2} & \dfrac{a^4-3a^2}{2(1-a^2)^2}\end{pmatrix}$

(2) $E_2=E_3=\sqrt{1+2a^2}-1$

(3) $E_N=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}$ $\qquad \lambda_N=\sqrt{1+2E_N}$

$$\mathbf{n}=\left(0,\ \frac{1}{2\lambda_N}(a+\sqrt{3}),\ \frac{1}{2\lambda_N}(a\sqrt{3}+1)\right)$$

2·7

$\mathbf{u}_{Q1}-\mathbf{u}_P=-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3$

$\mathbf{u}_{Q2}-\mathbf{u}_P=\dfrac{1}{2}(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3.5\mathbf{e}_3)$

$\mathbf{u}_{Q3}-\mathbf{u}_P=\dfrac{1}{4}(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3.75\mathbf{e}_3)$

$d\mathbf{u}_P=(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3)ds$

$Q\to P$，则$\mathbf{u}_Q-\mathbf{u}_P$方向$\to d\mathbf{u}_P$方向。

2·8

$\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad \Omega_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$\varepsilon=-\dfrac{6}{81}$

2·9 应变主值$E_1=-2$，$E_2=2$，$E_3=8$，主方向为

$\mathbf{n}_1=(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$，$\mathbf{n}_2=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$，$\mathbf{n}_3=(-1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})$

2·10

$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}$ $\qquad \mathbf{R}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2·11 $\mathbf{n}=(0,\ \sqrt{3}/2,\ -1/2)$，和$\mathbf{n}=(0,\ 0,\ 1)$

2·12

$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$，主值为4，0，4

$\mathbf{e}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$，主值为4/9，0，4/9

2·13 半轴为$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{2}$，其方向为

$\mathbf{n}_1=(1,0,\ 0)$, $\mathbf{n}_2=(0,\ 1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$, $\mathbf{n}_3=(0,1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$

2·14

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}(3\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-3)\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-3) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+3)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)\\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{2}}(2-2\sqrt{3}) & \frac{1}{4\sqrt{2}}(2+2\sqrt{3})\end{pmatrix}$$

2·15 三个半轴为$a_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$a_2=\frac{1}{\sqrt{6}}$，$a_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$，其方向为：$\mathbf{n}_1=(1,\ 0,\ 0)$，$\mathbf{n}_2=(0,\ \sqrt{3}/2,\ -1/2)$，$\mathbf{n}_3=(0,\ 1/2,\ \sqrt{3}/2)$

3·1 (1) 加速度分量$a_1=0$，$a_2=2x_2/(1+t)^2$，$a_3=6x_3/(1+t)^2$

(2) $x_1=X_1(1+t)$，$x_2=X_2(1+t)^2$，$x_3=X_3(1+t)^3$

(3) $a_1=0$，$a_2=2X_2$，$a_3=6X_3(1+t)$

3·2 流线方程为$(x_1/X_1)^2=x_2/X_2$，$(x_1/X_1)^3=x_3/X_3$，$(x_2/X_2)^3=(x_2/X_3)^2$。迹线方程即为题3·1(2)的答案，从中消去t，可见其与流线方程一致。

3·3 质点运动路线：$(x_1-A)^2+(x_2+B)^2=e^{-2B\lambda}/\lambda, v^2=\omega^2e^{-2B\lambda}, X_1=A+(e^{-B\lambda}/\lambda)\sin\lambda A$，$X_2=-B-(e^{-B\lambda}/\lambda)\cos\lambda A$

3·5 速度梯度为$\mathbf{L}$和P点之变形率$\mathbf{V}$为

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}6x_1x_2 & 3x_1^2 & 0\\ 0 & 4x_2x_3 & 2x_2^2\\ x_2x_3^2 & x_1x_3^2 & 2x_1x_2x_3\end{pmatrix},\quad (\mathbf{V})_{P点}=\begin{pmatrix}6 & 1.5 & 0.5\\ 1.5 & 4 & 1.5\\ 0.5 & 1.5 & 2\end{pmatrix}$$

P点之伸长率为$\frac{74}{25}$，剪切率为$\frac{89}{25}$

3·13 $n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1=0$

3·15 $V_{ij}=\frac{b}{2}(\nu_i\mu_j+\nu_j\mu_i)$，式中$b$为一常数。主伸长率与坐标取向无关，为简化取$x_1$轴沿$\boldsymbol{\mu}$方向，$x_2$轴沿$\boldsymbol{\nu}$方向，则$V_{12}=a$，其余$V_{ij}=0$，求得主伸长率之值为$\lambda_1=b$，$\lambda_2=-b$，（另一个为0），主方向与$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\nu}$交45°角并平行于$\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\nu}$的方向。

3·17

$$V_{\rho\rho}=\partial v_\rho/\partial_\rho,\quad V_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\rho}{\rho},\quad V_{zz}=\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$V_{\rho\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\rho}-\frac{v_\theta}{\rho}\right)$$

$$V_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right),\quad V_{\rho z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho}+\frac{\partial v_\rho}{\partial z}\right)$$

4·1 $\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla^2\phi=0$

4·6 $v_2=Ax_1/r^2$

4·11 $\sigma_{ij}V_{ij}=\beta[J_{(1)}{}^3-3J_{(1)}J_{(2)}+3J_{(3)}]$

4·14 $[\![\rho(\mathbf{v}-\mathbf{c})]\!]\cdot\mathbf{n}_\sigma=0$

4·15 $[\![\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}-\mathbf{c})]\!]\cdot\mathbf{n}_\gamma=[\![\mathbf{T}]\!]$

式中： $[\![\mathbf{T}]\!]=\overset{2}{\mathbf{T}}_{(+)}-\overset{1}{\mathbf{T}}_{(+)}$，写成分量形式为：

$[\![\rho v_i(v_j-c_j)-\sigma_{ji}]\!]n_j=0$

5·4 $W=\left(\frac{\lambda}{2}+\mu\right)I_{(1)}^2-2\mu I_{(2)}$

5·5 $U=\int_V WdV=\mu a^2\alpha^4\pi L/4=M\alpha L/2$

5·7 $\sigma_{ij}V_{ij}=\mu\nabla^2(\nabla\phi)^2=\mu\nabla^4(\phi^2)/2$

5·9 $\text{tp}\alpha=a_2/(g+a_3)$

5·11 $v_AS_A=v_BS_B$

5·14 $\nabla^2v_z=\frac{d^3v_3}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv_3}{dr}=-\frac{m}{\mu}$

$$v_z=\frac{1}{4}\left(\frac{m}{\mu}\right)(a^2-r^2)+(b^2-a^2)[\ln(r/a)/\ln(b/a)]$$

5·15） $\nabla^2v_z=\frac{\partial^2v_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_3}{\partial y^2}=-\frac{m}{\mu}$

$$v_z=\frac{ma^2b^2}{2\mu(a^2+b^2)}[1-(x/a)^2-(y/b)^2]$$

6·8 $\varphi(r)=A+\frac{B}{r^3}$ 式中，A、B为积分常数

6·9 $A=\frac{2}{3}u^{3/2}/\sqrt{C}$， $A_C=\frac{C}{3}p^3$

6·11 $Ty''+p(x)=0$ $\quad(y''=d^2y/dx^2)$

6·12 $T\nabla^2W+p(x,y)=0$ $\quad\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

6·13 平衡方程 $EJy^{(4)}+q=0$

边界条件：A端 $\delta\theta_A=0$，$\delta y_A=0$

B端 $M_B=0$，$Q_B=-ky_B$

6·14 $EI_2y^{(4)}+p_1y''+p_2y''=0$ $\quad(0\leqslant x_2\leqslant l_2)$

$EI_1y^{(4)}+p_1y''=0$ $\quad(l_2\leqslant x\leqslant l)$

6·15 纵向振动微分方程为：

$$(EAu')' - \mu\ddot{u} + F(x, t) = 0 \cdot$$

边界条件

$$x = 0,\ N_0 = [EAu']_{x=0} \quad 或 \quad \delta u(0, t) = 0$$
$$x = L,\ N_L = [EAu']_{x=L} \quad 或 \quad \delta u(L, t) = 0$$

7·1

$$\frac{\partial \beta}{\partial I_2} + I_1 \frac{\partial \gamma}{\partial I_2} + \frac{\partial \gamma}{\partial I_1} = 0$$

$$\frac{\gamma}{2} + \frac{\partial \alpha}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial \gamma}{\partial I_3} = 0$$

$$\frac{1}{2}(\beta + I_1 \gamma) - \frac{\partial \alpha}{\partial I_1} + I_3 \frac{\partial \beta}{\partial I_3} + I_1 I_3 \frac{\partial \gamma}{\partial I_3} = 0$$

参 考 文 献

〔1〕 Sih, G. C. Opening Remarks, *Proceedings of First International Symposium on Defects and Fracture*, Tuczno, Poland, 1980.

〔2〕 Odqvist, F. K. G., *Nonlinear Mechanics, Past, Present and Future*, Appl. Mech. Rev. 21 (1968), 1213—1222。

〔3〕 〔日〕德冈辰雄，理性连续介质力学入门，科学出版社，1982.

〔4〕 Fung, Y. C., *A First Course in Continuun Mechanics*, Second Edition, 1977.

〔5〕 Prager, W., *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Company, 1961.

〔6〕 〔美〕Eringen, A. C. 〔土〕 Suhubi, E. S., 弹性动力学，第一卷有限运动，戈革译，石油工业出版社，1983, 26—32.

〔7〕 Spencer, A. J. M., 连续体力学，李灏，陈树坚合译.

〔8〕 Atkin, R. J., and Fox, N., *An Introduction to the Theory of Elasticity*, Longman, London and New York, 1980.

〔9〕 Hunter, S. C., *Mechanics of Continuous Media*, Second Edition, New York, 1983.

〔10〕 Amenzade, Yu. A., *Theory of Elasticity*, Moscow, 1979.

〔11〕 郭仲衡，非线性弹性理论，科学出版社，1980。

〔12〕 Mase, G. E., *Theory and Problems of Continuum Mechanics*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1970.

〔13〕 Mindlin, R., *Influence of Couple-Stresses on Stress Concen-trations*, Experimental Mechanics, Vol. 3 № 1, 1963.

〔14〕 Eringen, A. and Suhubi, E., *Non-linear Theory of Simple Microelastic Solids*, Int. J. Engr. Sci, Vol. 2, 1964.

〔15〕 Il'yushin, A. A., Uch. Zap. Mosk. Univ. 39 (1940).

〔16〕 Ishlinskii, A. Yu., Izv. Akad. Nauk USSR, otd. tekh. nauk. 3. 1945.

〔17〕 Mc Meeking, R. M. & Rice, J. R., *Finite-Element Formulations For Problems of Large Elastic-Plastic Deformation*, Int. J. Solids Structures, 1975, Vol. 11, 601—616.

〔18〕 Valanis, K. C., *Partial Integrability as the Basis for the Existeuce of Entropy in Irreversible Systems*, ZAMM, 63, 1983. 70—80.

〔19〕 Valanis, K. C., *Irreversility and Existence of Entropy* Int. J. Nonlinear Mech. 1971. 337—360.

〔20〕 Rice, J. R., *Continuum Mechanics and Thermodynamics of Plasticity in*

Relation to Microscale Deformation Mechanics, "Constitutive Equations in Plasticity" Edited by ALi S. Argon, 1975.

〔21〕 Prager, W., *Recent Devəlopments in the Mathematical Theory of Plasticity*, Presented to the 7th Internal, Congress for Appl. Mech., London, 1948, J. Appl. phys. 20, 1949, 235—241.

〔22〕 Drucker, D. C., *"Some Implications of Work-Hardening and Ideal Plasticity."* Quarterly of Applied Mathematics, V. 7, N. 4, Jan. 1950: 411—418.

〔23〕 Drucker, D. C., *"A More Foundameutal Approach to Plastic Stress-StrainRelations"*, Proc. lst. U. S. Nat. Congr. of Appl. Mech., 1952: 481—491.

〔24〕 Fan Jinghong, Ph. D Dissertation, University of Cincinnati, USA, Manuscript Publications, University Microfilms International, 1983.

〔25〕 Valanis, K. C. and Fan Jinghong, *Endochronic Analysis of Cyclic Elastoplastic Strain Fields in a Notched Plate*, J. Appl. Mech. Vol. 50, 1983, 789—793.

〔26〕 范镜泓，内蕴时间塑性理论及其新进展“力学进展”Vol. 15, No. 3—4, 1985。

〔27〕 Fung, Y. C., Foundation of Solid Mechanics, Prentice-Hall, INC, 1966.

〔28〕 Phillips, A., *The Inelastic Theory of Metal Deformation Some Thoughts on Its Experimental Foundations*, Workshop on Inelastic Coastitutiv Equations For Metals, 1975.

〔29〕 卡恰诺夫，塑性理论基础，第二版，1971，中泽本81页。

〔30〕 Lee, E. H., *General Discussion*, *Workshop on Inelastic Constitutive Equations For Metals*, 1975.

〔31〕 Valanis,K.C., *On the Substance of Rivlin's Remarks on the Endochronice Theory*, Int. J. Solids Structures, Vol. 17, 1981, 249—265.

〔32〕 Valanis, K. C., *A Theory of Viscoplasticity Without A Yield Surface*, Archives of Mechanics, 23, 1971, 517—551.

〔33〕 范镜泓、张俊乾，内蕴时间本构理论在损伤力学中的应用——损伤材料的本构方程及内时标度，全国首届损伤力学会议邀请报告，1985年11月，黄山。

〔34〕 Fan, Jing hong, *On A Thermomechanical Constitutivc Theory And Its Applications to CDM*, Fracture, Fatigue And Composites, IUTAM Symposium on Thermomechanical Couplings in Solids, Paris, 1986.

〔35〕 Valanis, K. C., *Foundamental Consequences of a New Intrinsic Theory*, Arch, Mech. 1980, 171—191.

〔36〕 范镜泓，张俊乾，各向异性材料的内时本构方程及其在单向纤维复合材料中的应用，重庆大学学报，1985年第6期。

〔37〕 范镜泓，曾祥国，一种不用屈服概念的弹塑性梁内时分析方法的探讨，重庆大学

学报，1985年第八卷第六期，66—72。

〔38〕 范镜泓、彭向和、曾祥国，两种内蕴时间本构方程的定量比较及其实验验证，重庆大学学报，1985年第八卷第六期，35—41。

〔39〕 丘玉圃，Fortran 程序设计，科学出版社，1982。

〔40〕 Valanis, K. C. and Fan Jinghong, *Experimental Verification of Endochronic Plasticity in Spatially Varying Strain Fields*. Proceedings of International Conference of Plasticity, Italy, 1983, 153—173.

〔41〕 范镜泓、赵杰，固支薄圆板弹塑性弯曲的一种弹塑性分析，待发表。

〔42〕 Timoshenko, S. & Woinowsky-krieger, *Theory of Plates And Shells*, Mc GRAW-Hill Book Company, 1959.

〔43〕 范镜泓，低固疲劳寿命及其路径相关的一种内时理论分析，重庆大学学报，1985年第六期，58—65。

〔44〕 Valanis, K. C., *An Energy-Probability Theory of Fracture* (*An Endochronic Theory*), Journal de Mechanique. Vol. 14, No. 5, 1979.

〔45〕 Valanis, K, C., *On the Effect of Frequency of Fatipue Life*, Mechanics of Fatique AMD-Vol. 47.

〔46〕 范镜泓、彭向和，内时弹塑性分析的一种新算法及其实验验证，全国第二届计算力学会议，1986年。

〔47〕 曾纬，厚壁圆筒自增强残余应力的分析和计算，硕士论文，重庆大学，1984年。

〔48〕 Wu, H. C., and Wang, T. P., *Endochronic Description of Sand Response to Static Loading*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 17, 1981, 249—265.

〔49〕 Kestin, J. and Rice, J. R., *Paradoxes in the Application of Thermodynamics to Strained Solids*, A Critical Review of Thermodynamics, 1970, 275—297.

〔50〕 范镜泓，耗散型材料本构方程的形式不变性定律，重庆大学学报，1985年第 6 期。

〔51〕 Colemau, B. D., *Thermodynamics of Materials With Memory*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol, 17, 1964, 1—46.

〔52〕 谢邦杰，线性代数，高等教育出版社，1978。

〔53〕 武际可、王敏中，弹性力学引论，北京大学出版社，1981，Chap. 5, §2。

〔54〕 郭自强，固体中的波，地震出版社，1982，§4. 2.

〔55〕 王仁、熊祝华、黄文彬，塑性力学基础，科学出版社，1982，p. 134。

〔56〕 Chen, W. F., *Constitutive Relations of Engineering Materials*, 1985.

〔57〕 Lubliner, J., *On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Solid Mechanics*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 7. 1972, pp. 237—254.

〔58〕 Ziegler, H., *An Introduction to Thermo-Mechanics*, New Vork, 1983.

〔59〕 Flügge, W., 张量分析与连续介质力学，白铮译，中国建筑工业出版社，1980，§5-3、§5-4。